চাহিদা তত্ত্ব

(Demand Theory)

সৌরীন ভট্টাচার্য

মনীষা

উৎসর্গ

শ্রীপ্রভাত সর্বাধিকারী,

এসব বিষয়ে যাঁর কাছে আমার হাতেখড়ি।

"Raffiniert ist der Herr Gott, aber boshaft ist er nicht."

– Einstein –

The Lord God is sophisticated, but not malicious

ভূমিকা

বর্তমান বইয়ের আলোচ্য বিষয় ভোক্তার আচরণ। ভোক্তা বলতে এখানে একজন ব্যক্তিবিশেষকে বোঝাতে পারে, আবার প্রচলিত অর্থের একটি পরিবারকেও বোঝাতে পারে। তবে পরিবারকে যদি বর্তমান প্রসঙ্গের ভোক্তা হিসেবে কল্পনা করা হয় তাহলে মনে রাখতে হবে যে পরিবারের বিভিন্ন সভ্যের রুচি-পছন্দের ভিন্নতা আমাদের ধর্তব্য হবে না। কারণ, ভোক্তাকে আমাদের আলোচনার একক হিসেবে যদি গ্রহণ করতে হয় তাহলে পরিবারের বিভিন্ন সভ্যের মধ্যে যে-সব পার্থক্য (যদি কিছু থাকে) সে-সবের দিকে দৃষ্টি দিলে চলবে না। সেক্ষেত্রে পরিবারের রুচি-পছন্দ বা তার চাহিদা বলতে আমরা একটি নির্দিষ্ট রুচি, পছন্দ এবং চাহিদার পরিমাণকেই বোঝাব। অর্থাৎ, আমাদের আলোচনার জন্য 'ভোক্তা' এই ধারণাটিকে একটি বিমূর্ত ধারণা হিসেবে নিতে হবে। এই ভোক্তা কোনো একজন সাধারণ ব্যক্তি হতে পারে, একটি নির্দিষ্ট রুচি পছন্দের পরিবার হতে পারে, হতে পারে পাঁচজন সদস্যবিশিষ্ট একটি ক্লাব, যাদের প্রত্যেকটি সিদ্ধান্তের জন্য মতৈক্য নিশ্চিত। কাজেই 'ভোক্তা কে?' এই প্রশ্ন অবান্তর। প্রাসঙ্গিক প্রশ্ন হ'ল: ভোক্তার প্রকৃত স্বরূপ কি? এই প্রশ্নের কোনো তত্ত্ব নিরপেক্ষ উত্তর নেই। বিভিন্ন তত্ত্বের ক্ষেত্রে কল্পিত ভোক্তার স্বরূপ সম্বন্ধে এক এক রকমের কল্পনা করা হয়। কোথাও কল্পনা করা হচ্ছে যে ভোক্তার রুচি-পছন্দ একটি নির্দিষ্ট গঠনের, আবার কোথাও কল্পনা করা হচ্ছে যে ভোক্তার চাহিদা-অপেক্ষক একটি নির্দিষ্ট প্রকৃতির, কোথাও বা কল্পনা করা হচ্ছে যে ভোক্তা তার ব্যবহারিক জীবনে অনিশ্চয়তা বা ঝুঁকি সম্বন্ধে একটি নির্দিষ্ট দৃষ্টিভঙ্গি গ্রহণ করে এবং তার দ্রব্যাদি নির্বাচনের ক্ষেত্রেও সেই দৃষ্টিভঙ্গি প্রতিফলিত হয়। কাজেই ভোক্তার প্রকৃত স্বরূপ সম্বন্ধেও নিশ্চিত হয়ে কোনো চরম উত্তর দেওয়া চলেনা। যেটুকু বলা যেতে পারে তা এই যে ভোক্তা-সম্পর্কিত এই বিভিন্ন কল্পনা বা বর্ণনাকে ন্যায়তাত্ত্বিক রীতিসূত্র অনুসারে বিশ্লেষণ ক'রে ভোক্তার ব্যবহারিক আচরণ সম্বন্ধে উপযুক্ত সিদ্ধান্ত নির্ধারণ করতে হবে। এইসব সিদ্ধান্ত স্পষ্টত তাত্ত্বিক সিদ্ধান্ত। এই তাত্ত্বিক সিদ্ধান্তগুলিকে ভোক্তার পর্যবেক্ষণীয় আচরণের সঙ্গে মেলাতে হবে। তাত্ত্বিক সিদ্ধান্ত ও ভোক্তার পর্যবেক্ষণীয় আচরণের তুলনামূলক বিচারের ভিত্তিতে ভোক্তার প্রকৃত স্বরূপ সম্বন্ধে আপাতগ্রাহ্য সিদ্ধান্ত নিতে হবে।

অর্থনৈতিক জীবনের অন্যান্য অনেক ক্ষেত্রের মতোই ভোক্তার আচরণ সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করার জন্য তাত্ত্বিক বিশ্লেষণ এবং তথ্যের বিচার দুইই

প্রয়োজনীয়। তবে বর্তমান বইয়ে আমাদের আলোচনার বিষয় ভোক্তার আচরণের তাত্ত্বিক বিশ্লেষণ। চাহিদা সংক্রান্ত তথ্য নির্ধারণ বা তাত্ত্বিক ফলাফলের সঙ্গে তথ্যের তুলনামূলক বিচার মূলত অর্থমিতির অন্তর্ভুক্ত। তথ্যের আলোচনা তাই আমাদের আলোচনার পরিধির বাইরে রাখা হয়েছে। বর্তমান আলোচনা একান্তভাবে তাত্ত্বিক স্তরের।

অর্থনৈতিক তত্ত্বের বিশ্লেষণ এবং আলোচনা পদ্ধতি গত কয়েক দশকের গবেষণার ফলে আমূল বদলে গেছে। চাহিদা তত্ত্বের বিশ্লেষণও বিশেষ ক'রে গত প্রায় তিন দশকের মধ্যে এমন এক স্তরে উন্নীত হয়েছে যেখানে তত্ত্বচিন্তায় শৈথিল্যের অবকাশ প্রায় নেই। ভোক্তার রুচি-পছন্দ এবং সংশ্লিষ্ট অন্যান্য ধারণা আজ যতোদূর সম্ভব স্পষ্টভাবে উপস্থাপনা করা হয় এবং সম্ভবমতো আলোচনা ন্যায়তাত্ত্বিক বিচারে নিশ্ছিদ্র করার চেষ্টা করা হয় এবং অনেকাংশে তা সম্ভব। বর্তমান আলোচনায় তত্ত্বচিন্তার এই আধুনিক চেহারা উপস্থিত করার চেষ্টা করা হয়েছে। স্বাভাবিকভাবে অর্থনৈতিক তত্ত্বের এই আধুনিক চেহারায় গণিতের ভূমিকা অগ্রণী। ফলে অনেক অর্থনীতিবিদের মনে এমন ধারণার সৃষ্টি হয়েছে যে আধুনিক অর্থনীতিতে গণিতের 'দুষ্টপ্রভাবের' ফলে প্রকৃত অর্থনৈতিক চিন্তা পিছনে সরে গেছে। অর্থনৈতিক তত্ত্বে জেভন্‌স্‌, ওয়ালরাস ইত্যাদির উনিশ শতকী পৃষ্ঠপোষকতা ছাড়াই একথা নির্দেশ করা চলে যে এই অভিযোগ ঈষৎ একদেশদর্শী। কারণ স্থির মস্তিষ্কে একটু চিন্তা করলে দেখা যাবে যে বিভিন্ন প্রসঙ্গে গাণিতিক যুক্তিজাল এবং সিদ্ধান্তের পিছনে মূলত যে-সহজ-বুদ্ধিগ্রাহ্য অর্থনৈতিক চিন্তা কাজ করছে তা যথেষ্ট প্রাঞ্জল। বস্তুত, প্রায় অধিকাংশ ক্ষেত্রেই চাহিদা তত্ত্বের গাণিতিক সূত্রাবলি বা সিদ্ধান্তগুলির অকৃত্রিম অর্থনৈতিক ভাষ্য সম্ভব। আমার সাধ্যমত সর্বত্রই এরকম ব্যাখ্যা দেবার চেষ্টা করেছি। গাণিতিক অর্থনীতি সাধারণ কাণ্ড-জ্ঞান বর্জিত নয় এই সরল বার্তার পুনঃপ্রতিষ্ঠা ভবিষ্যৎ অর্থনৈতিক গবেষণার সহায় হবে সন্দেহ নেই।

আধুনিক অর্থনীতির তাত্ত্বিক চেহারাকে যথাযথ মর্যাদায় দাঁড় করাবার উদ্দেশ্যে স্থিতাবস্থা, তুলনামূলক স্থিতাবস্থা, সাম্যাবস্থার সুস্থিতি, ও চলিতাবস্থার ধারণাগুলির উপর জোর দেওয়া হয়েছে। উপযোগের পরিমাপ প্রসঙ্গে পরিমাপ তত্ত্বের আলোচনা সংক্ষেপে হলেও করা হয়েছে। এই সব পদ্ধতিগত প্রসঙ্গগুলির উপর জোর দেবার তাৎপর্য এই যে চাহিদা তত্ত্বের ন্যায়তাত্ত্বিক কাঠামোকে এতে ক'রে চিনে নেওয়া সহজ হবে। তাত্ত্বিক পদ্ধতি সম্বন্ধে অনেক সময়ে সম্যক ধারণা থাকেনা ব'লে এক একটি তত্ত্বের যথার্থ ভূমিকা সম্বন্ধে আমাদের অনেক ভুল ধারণা গড়ে ওঠে।

পদ্ধতিগত কাঠামো পরিষ্কার থাকলে এই ভুল ধারণা এড়ানো সম্ভব হয়; এবং উপরন্তু, পদ্ধতিগুলির পুনঃ পুনঃ প্রয়োগের ফলে তাদের ক্ষমতা সম্বন্ধেও প্রতীতি জন্মায়। এই প্রতীতি স্পষ্ট চিন্তার অনুকূল।

অনিবার্যভাবে কিছু উচ্চতর পর্যায়ের গাণিতিক ধারণা এই বইয়ে ব্যবহার করতে হয়েছে। সেট সংক্রান্ত কিছু কিছু ধারণা এবং নিরবচ্ছিন্নতা, উত্তলতা, চিত্রণ ইত্যাদি টপোলজিক্যাল ধারণাও সরাসরি ব্যবহার করা হয়েছে। তবে ধারণাগুলিকে প্রথম উল্লেখেই মূল পাঠের মধ্যে অথবা পাদটীকায় সংজ্ঞা দিয়ে ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করা হয়েছে। কিছু কিছু ক্ষেত্রে মূল প্রসঙ্গ থেকে দূরে সরে যাবার আশংকা ছিলো ব'লে প্রাসঙ্গিক গণিতের বই-এর স্পষ্ট পাঠনির্দেশ দেওয়া হয়েছে।

এই ভূমিকার শেষে পরিভাষা সম্বন্ধে দু'একটা কথা বলা প্রয়োজন। অর্থনীতির মতো আধুনিক বিদ্যায় পরিভাষার অভাব তো সর্বজনবিদিত। এ সম্বন্ধে আমি অত্যন্ত খোলা মনে এগোবার চেষ্টা করেছি। প্রচলিত অভিধান, কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয় সংকলিত ও প্রকাশিত পরিভাষা ও অন্যান্য যত পরিভাষা কোষ পেয়েছি নিঃসংকোচে ব্যবহার করেছি। এর মধ্যে বিশেষ উল্লেখযোগ্য এ. আই. এম. টি.-র গণিতের পরিভাষা। তবে এসবে প্রয়োজনের অনেক কিছুই মেটেনি। সেসব জায়গায় নিজের বিচার-বুদ্ধি প্রয়োগ ক'রে নতুন পরিভাষা নির্মাণ করেছি। প্রয়োজনবোধে এবং নিতান্ত বেমানান না হ'লে ইংরেজি পারিভাষিক শব্দ অবিকৃতভাবে বাংলা হরফে ব্যবহার করেছি। ইংরেজি ছাড়াও অন্যান্য বিদেশী ভাষার শব্দ এক আধটা রাখতে দ্বিধা করিনি। তবে এ ব্যাপারের অসম্পূর্ণতা নিয়ে আমার কোনো ভুল ধারণা নেই। পরিভাষার ব্যাপারে সমালোচনা ও পরামর্শ কেউ জানালে আমি বাধিত হব। বই সংক্রান্ত অন্যান্য বক্তব্যও অবশ্যই সাগ্রহে বিবেচ্য।

বিভিন্ন পরিচ্ছেদের সমীকরণ, সংজ্ঞা, প্রতিপাদ্য ও চিত্রগুলিকে পরিচ্ছেদের উপাংশ অনুসারে সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করেছি। যে-কোনো পরিচ্ছেদের তৃতীয় উপাংশের সপ্তম সমীকরণের সংখ্যা (3.7)। একই পরিচ্ছেদের মধ্যে উল্লেখের প্রয়োজনে পরিচ্ছেদের সংখ্যা নির্দেশ করিনি। তবে এক পরিচ্ছেদে অন্য পরিচ্ছেদের সমীকরণ (বা চিত্র) উল্লেখ করতে গিয়ে প্রথমেই পরিচ্ছেদের সংখ্যা, তারপর দশমিক বিন্দুর পরে উপাংশের সংখ্যা এবং দ্বিতীয় দশমিক বিন্দুর পরে সমীকরণের সংখ্যা নির্দেশ করেছি। যেমন (4.3.7)-এর অর্থ হ'ল চতুর্থ পরিচ্ছেদের তৃতীয় উপাংশের সপ্তম সমীকরণ।

লেখক

কৃতজ্ঞতা স্বীকার

এই বইয়ের পেছনে নানা জনের নানা রকম সাহায্য রয়েছে। আলোচ্য বিষযেব বিভিন্ন অংশ নিয়ে আলাপ আলোচনার সুযোগ পেয়েছি অধ্যাপক হীবেন্দ্রনাথ রায়, ডঃ অনিমেষ চক্রবর্তী ও শ্রীমতী গৌরী নাগেব কাছে। শ্রীহরেন্দ্রনাথ শূব গণিতের অংশ দু'এক জায়গায় দেখে দেওয়ায় বিশেষ নিশ্চিন্ত বোধ কবেছি। পশ্চিমবঙ্গ রাজ্য পুস্তক পর্ষদের তরফে যাঁদের সহযোগিতা পেয়েছি তাঁদের মধ্যে রয়েছেন প্রাক্তন মুখ্য প্রশাসন আধিকারিক শ্রীঅবনী মিত্র ও শ্রীপ্রদ্যুম্ন মিত্র এবং বর্তমান আধিকারিক শ্রীদিব্যেন্দু হোতা এবং সংশ্লিষ্ট পর্ষদ কর্মীবৃন্দ। জেনারেল প্রিণ্টার্স-এর সুরজিৎচন্দ্র দাস এই পাণ্ডুলিপি যে যত্ন ও ধৈর্যের সঙ্গে ছাপার চেষ্টা করেছেন তাতে ওঁর কাছে আমি কৃতজ্ঞ।

আরো আছে ব্যক্তিগত—না বলাই ভালো।

বিষয় সূচি

প্রথম পরিচ্ছেদ

কিছু পদ্ধতিগত ধারণা

1. অর্থনৈতিক বাস্তব ও অর্থনৈতিক প্রতিকল্প

বর্তমান বইয়ে আমাদের আলোচ্য বিষয় অর্থনৈতিক তত্ত্ব। কোনো বিশেষ দেশে বা কালে অর্থনৈতিক ঘটনাবলির আলোচনা আমাদের লক্ষ্য নয়। তবে অর্থনীতি যেহেতু একটি বাস্তবমুখী বিজ্ঞান, তাই অর্থনৈতিক তত্ত্ব সম্পূর্ণভাবে অর্থনৈতিক দুনিয়ায় কি ঘটে তার সঙ্গে সম্পর্কহীন হতে পারে না। কাজেই আলোচনার শুরুতে অর্থনৈতিক দুনিয়ার সঙ্গে আমাদের আলোচ্য অর্থনৈতিক তত্ত্বের সম্পর্ক কি তা বুঝে নেওয়া প্রয়োজন। এই সম্পর্কটি পরিষ্কার বুঝতে পারলেই তবে আমরা জানতে পারব অর্থনৈতিক তত্ত্বের কাছে আমাদের প্রত্যাশা কি হবে এবং কোনো অর্থনৈতিক তত্ত্বের বিচার তখন আমরা সেই উপযুক্ত নিরিখে করতে পারব। অর্থনৈতিক তত্ত্বের পদ্ধতিগত চরিত্র সম্বন্ধে সম্যক ধারণা থাকেনা ব'লেই আমরা অনেক সময়ে এক একটি তত্ত্বকে অযৌক্তিকভাবে সমালোচনা করি।

অর্থনৈতিক ঘটনাবলি ও অর্থনৈতিক তত্ত্বের সম্পর্ক আলোচনা করার সুবিধার জন্য আমরা 'অর্থনৈতিক বাস্তব' ও 'অর্থনৈতিক প্রতিকল্প' এই দুটি ধারণা ব্যবহার করতে চাই। অর্থনৈতিক বাস্তব বলতে অর্থনৈতিক দুনিয়ায় যা কিছু ঘটে তার সমষ্টিকে বোঝান হচ্ছে। এই অর্থনৈতিক দুনিয়ার সীমারেখা বিশেষ বিশেষ প্রসঙ্গে বিশেষ রকমের হতে পারে। আমাদের আলোচ্য প্রসঙ্গ যখন সমগ্র পৃথিবী তখন এই দুনিয়ার সীমারেখা বিশ্বজোড়া। আবার আলোচ্য প্রসঙ্গ যখন কোনো একটি বিশেষ দেশ বা তার কোনো একটি ছোট অংশ, তখন আমাদের অর্থনৈতিক দুনিয়ার সীমারেখা ঐ বিশেষ দেশ বা তার নির্দিষ্ট অংশ। আলোচ্য প্রসঙ্গ হতে পারে মাত্র একজন ব্যক্তির অর্থনৈতিক ক্রিয়াকলাপ; তখন আমাদের দুনিয়া ঐ ব্যক্তির ক্রিয়াকলাপেই সীমাবদ্ধ। যে-কোনো নির্দিষ্ট প্রসঙ্গে যে-নির্ধারিত অর্থনৈতিক দুনিয়া সেখানে যা কিছু ঘটছে তাই 'অর্থনৈতিক বাস্তব'। লক্ষ্য করা দরকার যে 'অর্থনৈতিক বাস্তব' এই ধারণাটি তথ্যের স্তরের ধারণা—তত্ত্বের স্তরের নয়। বস্তুত 'অর্থনৈতিক বাস্তব' ধারণাটি সম্পূর্ণভাবে তত্ত্ব নিরপেক্ষ।

উদাহরণ হিসেবে ধরা যেতে পারে বর্তমান বিশ্বের বিভিন্ন দেশের মধ্যেকার ব্যবসা-বাণিজ্য ও লেনদেনের সম্পর্কের কথা। এই সম্পর্কে যা

কিছু ঘটছে তাই আমাদের ধারণা অনুযায়ী বর্তমান প্রসঙ্গে অর্থনৈতিক বাস্তব। যেমন, আরব দেশগুলির থেকে যে অশোধিত তেল পৃথিবীর বিভিন্ন দেশে রপ্তানি হচ্ছে, বা ভারত-বাংলাদেশ থেকে যে কাঁচাপাট অন্যান্য দেশে যাচ্ছে, বা ইউরোপীয় দেশগুলি থেকে যে শিল্পদ্রব্য আমাদের দেশে আসছে এ সবই বর্তমান প্রসঙ্গের অর্থনৈতিক বাস্তবের অন্তর্গত। আলোচ্য প্রসঙ্গ যদি বিশ্ব অর্থনীতির পরিবর্তে দেশের আভ্যন্তরীণ অর্থনীতি হয় তাহলে একটি দেশের মধ্যে যে-সব অর্থনৈতিক কার্যাবলি প্রতিদিন ঘটছে তার সমষ্টি হবে ঐ প্রসঙ্গে অর্থনৈতিক বাস্তব।

এখানে একটি প্রশ্ন উঠতে পারে। আমবা বলেছি যে অর্থনৈতিক বাস্তব সম্পূর্ণভাবে তত্ত্ব নিরপেক্ষ। অর্থাৎ অর্থনৈতিক বাস্তবে কি ঘটছে তা ঐ অর্থনৈতিক বাস্তব নিয়ে যে তত্ত্ব চিন্তা করা হচ্ছে তার উপর নির্ভরশীল নয়। কিন্তু অর্থনৈতিক বাস্তবে কি ঘটছে তা আমরা তত্ত্ব নিরপেক্ষভাবে জানতে পারি কি? তত্ত্ব ও তথ্যের পারস্পরিক সম্পর্কে এখানে এক জটিল সমস্যা দেখা দেয়। কারণ তত্ত্বের সাহায্য ছাড়া কোনো অর্থনৈতিক বাস্তব পর্যবেক্ষণ করতে গেলে আমরা বড়ো জোর কিছু তথ্যের সমাবেশ দেখতে পাব। তাও সব প্রাসঙ্গিক তথ্য যে নিঃশেষ ক'রে দেখতে পেয়েছি এ-কথা কোনো সময়েই বলা সম্ভব হবে না। কারণ, কোনো নির্দিষ্ট বাস্তব সম্পর্কে কোনটা প্রাসঙ্গিক আর কোনটা প্রাসঙ্গিক নয় তা তো শুধুমাত্র তথ্যের স্তরের বিবেচনায় কখনোই বলা যাবে না। প্রাসঙ্গিকতা এমন একটি ধারণা যা ঐ নির্দিষ্ট বাস্তবের সামগ্রিক চরিত্র সম্পর্কে সাধারণ বোধগম্যতার উপর নির্ভর করে। এই সাধারণ বোধ-গম্যতা অর্জন করাই তত্ত্ব আলোচনার উদ্দেশ্য। তাই প্রশ্ন ওঠে যে তত্ত্ব আলোচনার জন্য যে-বাস্তবকে নির্বাচন করা হচ্ছে তার প্রকৃত স্বরূপ কি? স্পষ্টতই এই প্রশ্নের উত্তর তথ্যের স্তরে দেওয়া সম্ভব নয়। এই কারণে আলোচনার বা বিশ্লেষণের সূত্রপাতের জন্য 'অর্থনৈতিক বাস্তব' এই ধারণার প্রয়োজন পড়ে। আমরা কল্পনা ক'রে নিচ্ছি যে আমাদের তত্ত্বচিন্তা নিরপেক্ষভাবে অর্থনৈতিক বাস্তব একটা আছে। প্রসঙ্গটি নির্বাচন করার পরে প্রাথমিক পর্যবেক্ষণের ভিত্তিতে আমরা কিছু তথ্য জড়ো করতে পারব। এই প্রাথমিক তথ্য সংগ্রহের সব কিছু যে প্রাসঙ্গিক হবে এমন কোনো কথা নেই। তা সত্ত্বেও প্রাথমিক তথ্য সমাবেশ কিন্তু একান্ত প্রয়োজনীয়। এই প্রাথমিক তথ্যের ভিত্তিতেই তবে আমরা তত্ত্ব কাঠামো নির্মাণের কাজ শুরু করতে পারি।

অর্থনৈতিক বাস্তবের তাত্ত্বিক বিশ্লেষণের জন্য অর্থনৈতিক প্রতিকল্প বা মডেল নির্মাণ করা হয়। প্রতিকল্পের মূল লক্ষ্য থাকে একটি নির্দিষ্ট

অর্থনৈতিক বাস্তবের পূর্ণ স্বরূপ সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞান লাভ করা। যে অর্থনৈতিক বাস্তব নিয়ে আমরা আলোচনা করতে চাই তার অন্তর্গত বিভিন্ন চলগুলিকে প্রথমে জেনে নেওয়া প্রয়োজন। তবে শুরুতেই এই জেনে নেবার কাজটা কিছুতেই সম্পূর্ণ হতে পারে না। তাই প্রথম ধাপ হিসেবে অর্থনৈতিক বাস্তবের যে-তথ্য সংগ্রহ করা হয়েছে তার থেকে কয়েকটি প্রধান চল নির্বাচন করা হয়। এই চল নির্বাচনের কাজই প্রতি-কল্প নির্মাণের প্রথম ধাপ। বাস্তবের প্রাথমিক পর্যবেক্ষণ থেকেই কোন চলগুলি ঐ বাস্তবে প্রধান ভূমিকা গ্রহণ করে তার সম্বন্ধে একটা মোটামুটি আন্দাজ পাওয়া যেতে পারে। এই আন্দাজই প্রতিকল্প নির্মাণে আমাদের প্রথম সহায়। উদাহরণ হিসেবে ধরা যাক একটি বাজার। যে-কোনো দ্রব্যের বাজারের তাত্ত্বিক প্রতিকল্প নির্মাণ করতে গিয়ে আমরা প্রাথমিক পর্যবেক্ষণের ভিত্তিতে ধরে নিতে পারি যে বাজারে দ্রব্যটির মূল্য, ক্রেতাদের আয়, বিক্রেতাদেব হাতে দ্রব্যের মোট যোগান ইত্যাদির ভূমিকা গুরুত্বপূর্ণ। এদের প্রত্যেককে আমরা x, y, z নামের এক একটি চলের সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি। x, y, z এদের চল বলা হচ্ছে এই কাবণে যে বিভিন্ন সময়ে বিভিন্ন বাজাবে এই রাশিগুলিব মান বিভিন্ন রকম হতে পারে। এই-ভাবে বিভিন্ন চলের সাহায্যে একটি সমগ্র অর্থনৈতিক বাস্তবের বর্ণনা আমরা দিতে পারি।

এখানে লক্ষ্য রাখা দরকার যে, আমরা যে-চলগুলির কথা উপরের উদাহবণে বলেছি তারা সবাই পরিমাপযোগ্য রাশি। অর্থাৎ, ক্রেতার আয়, বিক্রেতার যোগান, দ্রব্যের মূল্য ইত্যাদি ধারণাগুলিকে আমরা পরিমাপ কবতে পারি এবং সেই পরিমাপের ফল গাণিতিক রাশির সাহায্যে প্রকাশ করতে পারি। এমন মনে করার কোনো কারণ নেই যে একটি নির্দিষ্ট অর্থনৈতিক বাস্তবে যা কিছু ঘটে বা ঐ বাস্তবের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট সব চল-গুলিই খুব সহজে পরিমাপযোগ্য রাশির সাহায্যে প্রকাশ করা সম্ভব। বস্তুত একটু চিন্তা করলেই দেখা যাবে যে বিভিন্ন অর্থনৈতিক বাস্তবে এমন অনেক কিছু ঘটে বা ঘটতে পারে যা অনেকাংশে গুণগত, এবং সেই কারণে, অপরিমেয় বিষয়ের দ্বারা প্রভাবিত। যেমন, জাতিভেদ প্রথা, ধর্মীয় বিশ্বাস, আচার-বিচারের সংস্কার ইত্যাদি। একথা অনুমান করা সঙ্গত যে বিভিন্ন ক্ষেত্রের অর্থনৈতিক বাস্তবে এই ধরনের বিষয়ের প্রভাব যথেষ্ট হতে পারে। এবং বিষয়গুলি এমন যে সহজে এদের পরিমাপ ক'রে রাশির সাহায্যে প্রকাশ করা যায় না। সবসময়ে তা একেবারেই অসম্ভব এ-কথা বলা হচ্ছে না। তবে সাধারণত তা করা হয় না, এবং করার অনেক অসুবিধা আছে এ বিষয়ে সন্দেহ নেই।

এই সব অপরিমেয় বিষয়ের ভূমিকা স্বীকার ক'রে নিয়েও অর্থনৈতিক প্রতিকল্প নির্মাণে এখনো পর্যন্ত সাধারণত এদের বর্জন করা হয়। পরিমেয় (অর্থাৎ তুলনায় সহজে পরিমেয়) বিষয়গুলির তুলনায় এদের ভূমিকা নগণ্য বলে নয়—অপরিমেয় বিষয়ের আলোচনায় স্পষ্ট সিদ্ধান্ত, সংখ্যাগত ভাবে নির্দিষ্ট সিদ্ধান্ত অনেক ক্ষেত্রেই যথেষ্ট অসুবিধাজনক ব'লে। একথাও গোড়াতে ব'লে রাখা ভালো যে এইসব সীমাবদ্ধতার জন্য অর্থনৈতিক বাস্তব সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞানলাভ করার পথে তাত্ত্বিক অর্থনীতি কতোটা সহায়ক এ বিষয়েও অনেকের সন্দেহ আছে।

তাত্ত্বিক অর্থনীতির ভূমিকা সম্বন্ধে পদ্ধতিগত বিতর্কের আপাতত কোনো অবকাশ নেই। বর্তমান প্রসঙ্গে আমরা শুধু এটুকুই বলছি যে, অর্থনৈতিক তত্ত্বের অধিকাংশ প্রতিকল্পে যে-চলগুলিকে ব্যবহার করা হয় তারা পরিমাপযোগ্য, অন্তত পরিমাপযোগ্য ব'লে তাদের কল্পনা করা হয়। বিশেষ বিশেষ ক্ষেত্রে কিভাবে কোনো কোনো চলকে পরিমাপ করা যেতে পারে তাও নির্দেশ করা থাকে। সে আলোচনাও অর্থনৈতিক তত্ত্বের অন্তর্গত। কাজেই একদল পরিমাপযোগ্য চল হ'ল অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের প্রথম উপাদান। এরপর থেকে উল্লেখের সুবিধার জন্য এই চলগুলিকে আমরা $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এইভাবে নির্দেশ করব। $x_1, \ldots, x_n$ এই পরিমাপযোগ্য অর্থনৈতিক চলগুলির যে সেট (বা সমষ্টি) তাই হ'ল অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের ভিত্তি।

অর্থনৈতিক প্রতিকল্প নির্মাণের দ্বিতীয় উপাদান হ'ল নির্বাচিত চলগুলির মধ্যেকার সম্পর্ক। তাত্ত্বিক আলোচনার জন্য বিভিন্ন চলের মধ্যে বিভিন্ন রকমের সম্পর্ক কল্পনা করা হয়। এই সম্পর্কগুলি কখনো পরিমাণগত, আবার কখনো গুণগত। যেমন, দুটি চল x_1 এবং x_2-এর মধ্যে পরিমাণগত একটা সম্পর্ক এমন হতে পারে যে x_1 x_2-এর 5 গুণ বড়ো। গুণগত সম্পর্ক একটা হতে পারে যে x_1 বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x_2-ও বৃদ্ধি পায়। আমরা আগেই বলেছি যে অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের চলগুলি সাধারণত পরিমাপযোগ্য। কাজেই এই চলগুলির মধ্যে যে-সম্পর্ক কল্পনা করা হয় তাদের সাধারণত গাণিতিক সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। $x_1 = 5x_2$ এই হ'ল একটি সম্ভাব্য গাণিতিক সমীকরণ। চলগুলির মধ্যেকার কল্পিত গুণগত সম্পর্কও সমীকরণ বা সমীকরণের কিছু নির্দিষ্ট ধর্মের সাহায্যে প্রকাশ করা যেতে পারে। যেমন, x_1-এর বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে x_2-এর বৃদ্ধি হয় এই গুণগত সম্পর্কটি প্রকাশ করার জন্য x_1 এবং x_2-এর কলনীয় সহগ (বা ডেরিভেটিভ্)-এর সাহায্য নেওয়া যেতে পারে। সেক্ষেত্রে এই সম্পর্কটির বর্ণনা হবে $dx_2/dx_1 > 0$ বা x_2

এবং x_1-এর সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকটি যদি $f(x_2 = f(x_1))$ হয়, তাহলে বলা যেতে পারে যে $f'(x_1) > 0$।

সাধারণভাবে $x_1, \ldots, x_n$ এই চলগুলির মধ্যেকার যে-কোনো কল্পিত সম্পর্ককে আমরা $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ এই নিহিত অপেক্ষকের রূপে প্রকাশ করতে পারি। কোনো প্রতিকল্পে যে এই রকম সম্পর্কের সংখ্যা কতো হবে তার ধরাবাঁধা কোনো নিয়ম নেই। তবে অন্যান্য নানা বিচারের ভিত্তিতে প্রয়োজনীয় অপেক্ষকের সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যেতে পারে। আপাতত আমরা সেই বিস্তারিত বিশ্লেষণে যাচ্ছি না। বর্তমান প্রসঙ্গে এটুকু বলাই যথেষ্ট যে, সাধারণভাবে আমাদের প্রতিকল্পের নির্বাচিত চল-গুলির মধ্যে অনেক সম্পর্ক থাকতে পারে বা কল্পনা করা যেতে পারে। মনে করা যাক আমাদের n-সংখ্যক চলের মধ্যে বিভিন্ন যুক্তি বা তথ্যের ভিত্তিতে m-সংখ্যক অপেক্ষকের বা গাণিতিক সমীকরণের বা অর্থনৈতিক সম্পর্কের কল্পনা করা হ'ল। সেক্ষেত্রে সমীকরণগুলির নিহিতরূপে সাধারণ চেহারা দাঁড়াবেঃ

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1\cdot1)$$

নির্বাচিত চল এবং তাদের মধ্যেকার এই সম্পর্কগুলি নিয়েই গঠিত হয় একটি অর্থনৈতিক প্রতিকল্প। আমরা ধরে নিচ্ছি যে চলগুলি পরিমেয় এবং সম্পর্কগুলি সমীকরণের সাহায্যে প্রকাশযোগ্য। কখনো কোনো বিশেষ অর্থনৈতিক প্রতিকল্পে ব্যবহৃত গাণিতিক সম্পর্ক সমীকরণ হিসেবে প্রকাশ না করে অসমীকরণ হিসেবেও প্রকাশ করা যেতে পারে। বিভিন্ন ধরনের প্রোগ্রামিং মডেল এর প্রকৃষ্ট উদাহরণ। বিশেষ ক্ষেত্র ছাড়া আমরা সাধারণ-ভাবে গাণিতিক সম্পর্কগুলিকে সমীকরণের রূপেই প্রকাশ করব। মনে করা যাক E একটি অর্থনৈতিক প্রতিকল্প বা মডেল বা অর্থনৈতিক ব্যবস্থা। সাধারণভাবে আমরা বুঝব যে $E = (x_i, f_j)\ i = 1, \ldots, n$ এবং $j = 1, \ldots, m$। অর্থাৎ n-সংখ্যক চল এবং m-সংখ্যক গাণিতিক সমীকরণ নিয়ে গঠিত একটি ব্যবস্থাকে আমরা বলছি **মডেল** বা **প্রতিকল্প**।

অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের সাধারণ ধারণা পরিষ্কার করতে গেলে একথা বুঝে নেওয়া প্রয়োজন যে প্রতিকল্পের সমীকরণগুলিকে আমরা পাচ্ছি অঙ্গীকার হিসেবে। যে-কোনো অর্থনৈতিক বাস্তবের প্রসঙ্গে চলগুলিকে নির্বাচন করার পরে তাদের মধ্যেকার পরস্পর নির্ভরতার সম্পর্কগুলিকে নির্ধারণ করতে হবে। তত্ত্ব কাঠামো নির্মাণে এই সম্পর্ক নির্ধারণের

কাজটি খুব গুরুত্বপূর্ণ। এই সম্পর্কগুলি আমরা অনুমান ক'রে নিই। এই অনুমানকেই এক একটি প্রতিকল্পের অংগীকার বলে। অংগীকার সাধারণত এমনভাবে করা হয় যে তাদের গাণিতিক সমীকরণ যেন সহজবোধ্য হয় এবং সমীকরণগুলি যেন সমাধানযোগ্য হয়। কারণ, শুধুমাত্র অর্থনৈতিক বিচারের ভিত্তিতে যদি এমন অংগীকার গ্রহণ করা হয় যে সমীকরণগুলির সহজবোধ্য সমাধান নেই বা পাওয়া সহজ নয়, সেক্ষেত্রে প্রতিকল্পটির থেকে স্পষ্ট কোনো সিদ্ধান্তে পেঁাছনো সম্ভব হবে না। ফলে এই ধরনের প্রতিকল্পের অর্থনৈতিক তাৎপর্য যতই থাকুক না কেন তা মূলত ফলপ্রসূ হবে না। যে-কোনো প্রতিকল্প থেকে স্পষ্ট সিদ্ধান্তে পেঁাছতে পারলেই তবে সিদ্ধান্তগুলিকে আমরা অর্থনৈতিক বাস্তবের পর্যবেক্ষণের সংগে তুলনা করতে পারব। একমাত্র এই তুলনার ফলেই জানা যাবে যে প্রতিকল্পের সিদ্ধান্ত যদি বাস্তবের কাছাকাছি থাকে তবে প্রতিকল্পের অন্তর্ভুক্ত অংগীকারগুলি মোটামুটি গ্রহণযোগ্য; আর বাস্তবের সংগে তাত্ত্বিক সিদ্ধান্তের গরমিল যদি খুব বেশী হয় তাহলে প্রতিকল্পেব কোনো না কোনো অংগীকারকে বর্জন বা পরিবর্তন অথবা নতুন অংগীকার গ্রহণ করতে হবে। এমনি ক'রে এক একটি বাস্তবের প্রসংগে নতুন নতুন তত্ত্বের প্রবর্তনা হয়। তাত্ত্বিক আলোচনায় আমাদের কাজ $F=(x_i, f_i)$ এই প্রতিকল্পের থেকে যুক্তি-প্রমাণের সাহায্যে যতো-দূর সম্ভব স্পষ্ট সিদ্ধান্তে পেঁাছনো। সিদ্ধান্তগুলিকে অর্থনৈতিক বাস্তবের ঘটনার সংগে তুলনা করা এবং মিল-গরমিল খুঁজে বার করা তাত্ত্বিক অর্থনীতির অন্তর্ভুক্ত নয়। বৈজ্ঞানিক পদ্ধতির দিক থেকে সে-কাজটিও অবশ্য একই রকম গুরুত্বপূর্ণ।

অংগীকারের ভিত্তিতে প্রতিকল্পে আমরা যে গাণিতিক সম্পর্কগুলি পাচ্ছি তাদের মোটামুটিভাবে দুটি শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়। এর একটিকে আমরা নাম দিচ্ছি আচরণগত সম্পর্ক আর অন্যটিকে বলছি কারিগরি সম্পর্ক। উদাহরণের সাহায্যে এই দুই-এর পার্থক্য নির্দেশ করা যেতে পারে। অর্থনীতিতে বহুল প্রচলিত দুটি গাণিতিক সম্পর্কের কথা ধরা যাক—ভোগ অপেক্ষক এবং উৎপাদন অপেক্ষক। ভোগ অপেক্ষকে মনে করা হয় যে কোনো ব্যক্তির বা সমগ্র অর্থনীতির মোট ভোগ ব্যয় ব্যক্তির বা অর্থনীতির মোট আয়ের উপব নির্ভরশীল। C যদি মোট ভোগ ব্যয় হয় এবং Y যদি আয় হয় তাহলে ভোগ-অপেক্ষক হ'ল $C=f(Y)$। উৎপাদন অপেক্ষকের বেলাতে মোট উৎপাদনের সংগে ব্যবহৃত উৎপাদনের উপাদানগুলির সম্পর্ক নির্দেশ করা হয়। কোনো দ্রব্য উৎপাদন করতে গেলে কোন উপাদান কত পরিমাণে লাগে তার উপর

নির্ভর করে উৎপাদন অপেক্ষকের সাধারণ রূপ। X যদি হয় কোনো দ্রব্যের মোট উৎপাদনের পরিমাণ এবং L ও K যদি হয় যথাক্রমে শ্রম ও মূলধনের মোট নিয়োগ তাহলে উৎপাদন অপেক্ষক হবে $X=F(L, K)$। এই দুটি উদাহরণ থেকে আচরণগত সম্পর্ক ও কারিগরি সম্পর্কের পার্থক্য বোঝা যেতে পারে।

একটু চিন্তা করলে দেখা যাবে যে f অপেক্ষকটির মধ্যে কোনো ব্যক্তি বা সমগ্র অর্থনীতির আচরণ সম্পর্কিত একটা অঙ্গীকার নিহিত আছে। যে ব্যক্তি আয়ের তুলনায় বেশি অংশ সঞ্চয়ের বদলে ভোগে ব্যয় করে সে ব্যক্তির ভোগ অপেক্ষকের প্যারামিটারগুলির মান একরকম হবে। আর যে ব্যক্তি আয়ের তুলনায় কম অংশ ভোগে ব্যয় করে তার অপেক্ষকের প্যারামিটার-গুলির মান অন্যরকম। একটি সহজ উদাহরণ নেওয়া যাক। C_1 এবং C_2 দু-জন ব্যক্তির মোট ভোগ ব্যয় এবং Y_1 ও Y_2 যথাক্রমে তাদের আয়। মনে করা যাক $C_1 = \cdot 5Y_1$ এবং $C_2 = \cdot 9Y_2$। এক্ষেত্রে প্রথম ব্যক্তি আয়ের 50 শতাংশ এবং দ্বিতীয় ব্যক্তি আয়ের 90 শতাংশ ভোগে ব্যয় করে। দুই ব্যক্তির এই আচরণগত পার্থক্য তাদের দু'রকম সিদ্ধান্তের উপর নির্ভরশীল। এই অর্থে ভোগ অপেক্ষক একটি আচরণগত সম্পর্ক। কারিগরি সম্পর্কের উদাহরণ হিসেবে একটি উৎপাদন অপেক্ষকের কথা কল্পনা করা যাক। $X=F(L, K)$ যদি একটি উৎপাদন অপেক্ষক হয় তাহলে L এবং K-এর নির্দিষ্ট মান দেওয়া থাকলে অপেক্ষকটি থেকে মোট উৎপাদনের পরিমাণ জানতে পারা যাবে। শ্রম ও মূলধনের নিয়োগের হ্রাসবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে উৎপাদনের হ্রাসবৃদ্ধি কিভাবে হয় তা নির্ভর করে সমাজের কারিগরি অবস্থার উপর। সমাজের কারিগরি জ্ঞান বা দক্ষতা বৃদ্ধি পেলে একই পরিমাণ শ্রম ও মূলধনের নিয়োগ থেকে তুলনায় বেশি পরিমাণ উৎপাদন পাওয়া সম্ভব। উৎপাদন অপেক্ষকের চরিত্র কি হবে তা নির্ভর করে উৎপাদনের কারিগরি অবস্থার উপর। এই অর্থে উৎপাদন অপেক্ষক একটি কারিগরি সম্পর্ক। যে-কোনো অর্থনৈতিক প্রতিকল্প নির্মাণের সময় যে-সমস্ত অঙ্গীকার করা হয় তার মধ্যে কিছু থাকে আলোচ্য সমাজের অর্থনৈতিক আচরণ সম্পর্কিত আর কিছু থাকে সমাজের কারিগরি অবস্থা সম্পর্কিত।

প্রতিকল্পের গাণিতিক সম্পর্কগুলির মধ্যে আচরণগত ও কারিগরি এই দুই ধরনের সমীকরণ ছাড়াও আর একটি তৃতীয় ধরন প্রায়ই থাকে বা রাখা প্রয়োজন পড়ে। এদের সম্বন্ধে আলাদাভাবে কোনো অঙ্গীকারের হয়তো প্রয়োজন পড়ে না। প্রতিকল্পের মধ্যে যে বিভিন্ন রকমের চল থাকে অনেক সময়ে তাদের মধ্যে কিছু সংজ্ঞাগত সম্পর্ক নির্দিষ্টভাবে বর্তমান থাকে।

সে-ক্ষেত্রে ঐ সব চল একসঙ্গে ব্যবহার করতে গেলে তাদের মধ্যেকার সংজ্ঞাগত সম্পর্কগুলিকে মানতেই হবে। তাই প্রতিকল্পের মধ্যে এই ধরনের সংজ্ঞাগুলিকে স্বতন্ত্রভাবে উল্লেখ করা হয়। যেমন, ধরা যাক প্রকৃত মজুরি ও আর্থিক মজুরি। আমরা জানি যে আর্থিক মজুরিকে মূল্যস্তর দিয়ে ভাগ করলে যা পাওয়া যায় তাকেই বলে প্রকৃত মজুরি। মনে করা যাক $w=$ প্রকৃত মজুরি, $W=$ আর্থিক মজুরি এবং $P=$ মূল্য-স্তর। এক্ষেত্রে $w=W/P$। এটি একটি সংজ্ঞাবাচক সম্পর্ক। কোনো প্রতিকল্পে যদি এই চলগুলিকে ব্যবহার করতে হয় তাহলে তাদের মধ্যেকার এই সম্পর্ক মেনে নিতেই হবে। এক্ষেত্রে প্রতিকল্প নির্মাতার আর কোনো স্বাধীনতা নেই।

আচরণগত, কারিগরি ও সংজ্ঞাবাচক এই তিনরকম গাণিতিক সম্পর্ক নিয়ে গঠিত একটি তত্ত্ব কাঠামোকে আমরা বলেছি অর্থনৈতিক প্রতিকল্প। অর্থনৈতিক প্রতিকল্প তাত্ত্বিক স্তরের ধারণা, কিন্তু অর্থনৈতিক বাস্তব তথ্যের স্তরের ধারণা। এই প্রভেদ স্পষ্ট থাকা প্রয়োজন। অর্থনৈতিক বাস্তবের সম্বন্ধে সম্যক জ্ঞানলাভ করার উদ্দেশ্যেই অর্থনৈতিক প্রতিকল্প নির্মাণের প্রয়োজন পড়ে।

2. স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ

অর্থনৈতিক বাস্তবের বিভিন্ন দিক সম্বন্ধে জ্ঞান লাভ করার উদ্দেশ্যে অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের বিভিন্ন রকমের বিশ্লেষণ প্রয়োজন পড়ে। এইরকম তিনটি প্রধান বিশ্লেষণ পদ্ধতি হ'লঃ স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ, তুলনামূলক স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ ও চলিতাবস্থার বিশ্লেষণ। আমরা একে একে তিনটি পদ্ধতির বর্ণনা দেব। বর্তমান অংশে স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ নিয়ে আলোচনা করা হবে।

অর্থনৈতিক প্রক্রিয়াগুলি সবই সময়ের উপর নির্ভরশীল ব'লে কল্পনা করা হয়। যে-কোনো অর্থনৈতিক কার্য সম্পাদন করতে কিছুটা সময় লাগে, তা সে যত কম সময়ই হোক না কেন। এই কারণে অর্থনৈতিক বাস্তবের তাত্ত্বিক বিশ্লেষণের জন্য সময়ের এক বিশেষ ভূমিকা রয়েছে। প্রতিকল্পের মধ্যে সময়কে কিভাবে ব্যবহার করা হচ্ছে বা সময়ের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট বাস্তবের সম্পর্ক কিভাবে কল্পনা করা হচ্ছে তার উপর নির্ভর ক'রে নির্মিত প্রতিকল্পকে কখনো বলা হয় স্থিতাবস্থ প্রতিকল্প আবার কখনো বলা হয় চলিতাবস্থ প্রতিকল্প। প্রতিকল্পের বিভিন্ন অর্থনৈতিক চলগুলি যেমন পরিমেয় ব'লে ধরা হচ্ছে, সময়কেও তেমনি একটি পরিমেয়

চল হিসেবে গণ্য করা হচ্ছে। সময়ের পরিমাপের জন্য দিন, সপ্তাহ, মাস, বছর ইত্যাদি অনেক প্রচলিত একক আছে। এর যে-কোনো একটিকেই আমাদের আলোচনার জন্য সময়ের একক হিসেবে গ্রহণ করায় কোনো বাধা নেই। সাধারণভাবে আমরা কল্পনা করে নিই যে সময়ের পরিমাপের জন্য কোনো একটি একক নির্বাচন করা গেল। এই একককটিকে আমরা বলব হিসাবের একক। হিসাবের একক আমাদের প্রচলিত এককগুলির কোনোটির সঙ্গে এক হতেও পারে, না হতেও পারে। যেমন, ধরা যাক হিসাবের একক হিসেবে নির্বাচন করা হ'ল প্রচলিত এককের এক বছর। সেক্ষেত্রে প্রচলিত এককের এক মাস হবে আমাদের নির্বাচিত এককের 1/12 অংশ। আবার যদি প্রচলিত এক মাসকে হিসাবের একক হিসাবে নির্বাচন করা হয় তাহলে প্রচলিত এক বছর হবে নির্বাচিত এককের 12 গুণ। তাত্ত্বিক আলোচনার প্রসঙ্গে আমরা সর্বদাই সময়কে হিসাবের এককে পরিমাপ করব, অর্থাৎ হিসাবের একক যাই হোক না কেন, আমাদের আলোচ্য সময়ের কাল সব সময়েই হবে সেই হিসাবের এককের কোনো এক গুণিতক। মনে করা যাক $t =$ সময়। সময়ের গতি বোঝাবার জন্য সেক্ষেত্রে আমরা $t = 0, 1, 2, \ldots$ ইত্যাদি মান ব্যবহার করতে পারি। এই মানগুলির সবই হিসাবের এককের গুণিতক হিসেবে প্রাপ্য। এর মধ্যে $t = 0$ মানে হবে যে-কোনো অর্থনৈতিক প্রক্রিয়ার সূত্রপাত।

প্রতিকল্পে ব্যবহৃত অন্যান্য চলগুলিকে যেহেতু সময়সাপেক্ষ হিসেবে কল্পনা করা হয়েছে তাই যে-কোনো মান সময়ের সঙ্গে জড়িত। ফলে যে-কোনো অর্থনৈতিক চল X_1-এর কোনো নির্দিষ্ট মান যখন নির্দেশ করা হয় তখন তা সময়ের এককের কোন মানের সঙ্গে জড়িত তাও নির্দেশ করা দরকার। যেমন x_1^t বলতে আমরা বোঝাব X_1 চল-এর $t = t$ সময়ে একটি নির্দিষ্ট মান। এই t অবশ্যই হিসাবের এককের t গুণ। ঐ একই চল-এর মান একটি সময়ের একক পূর্বে বা পরে বোঝাতে হ'লে আমরা যথাক্রমে ব্যবহার করব x_1^{t-1} এবং x_1^{t+1}। এইভাবে t-কে যে-কোনো সময়ের একটি নির্দিষ্ট মান হিসেবে ধরলে অন্য যে-কোনো সময়ান্তরে চলটির মান x_1^{t-s} বা x_1^{t+s} এইভাবে নির্দেশ করা যেতে পারে।

স্থিতাবস্থার প্রতিকল্প যখন নির্মাণ করা হয় তখন কল্পনা করা হয় যে আলোচ্য অর্থনৈতিক বাস্তবের যে-কোনো একটি সময়ের পূর্ণ বিবরণ যেন আমাদের কাছে আছে। অর্থাৎ t-এর যে-কোনো একটি মানের জন্য আলোচ্য বাস্তবের প্রাসঙ্গিক সমস্ত চলগুলির নির্দিষ্ট মান যেন আমরা পর্যবেক্ষণ করেছি। এ ক্ষেত্রে স্থিতাবস্থার প্রতিকল্প নির্মাণের উদ্দেশ্য হ'ল ঐ মানগুলিকে নির্ধারণ করা। প্রতিকল্প নির্মাণের জন্য যে-সব

অংগীকার করা হয় তার প্রত্যেকটি আলোচ্য বাস্তব সম্পর্কে এক একটি কল্পনা। অর্থাৎ গোটা প্রতিকল্পটিকে বলা যেতে পারে আলোচ্য অর্থ-নৈতিক বাস্তব সম্পর্কে প্রতিকল্প নির্মাতার কল্পনা। স্থিতাবস্থার প্রতিকল্পে এই কল্পনা এমনভাবে করা হয় যে প্রত্যেকটি চল যেন সময়ের একই মানে পরিমাপ করা হচ্ছে। অর্থাৎ, $x_1, \ldots, x_n$ যদি আমাদের প্রতি-কল্পের বিভিন্ন চল হয় তাহলে সময়ের সংগে জড়িত তাদের চেহারা দাঁড়াচ্ছে $x_1{}^t, \ldots, x_n{}^t$। প্রতিকল্পের বিভিন্ন সমীকরণগুলির সাধারণ চেহারা দাঁড়াচ্ছে $f_j(x_1{}^t, \ldots, x_n{}^t)=0$। এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে, প্রত্যেকটি চল যেহেতু একই সময়ে পরিমাপ করা হচ্ছে তাই চলগুলির সময় নির্দেশ অবান্তর। চলগুলি কার্যত যেন সময়হীন। গাণিতিক দিক থেকে বলা চলে যে প্রতিকল্পের সমীকরণগুলির চরিত্র হবে বীজগণিতীয়।

$f_j(x_1, \ldots, x_n)=0 \quad (j=1, \ldots, m)$ এই সমীকরণগুলি নিয়ে গঠিত একটি প্রতিকল্পের সাম্যাবস্থা বলতে কি বোঝায়? সাম্যাবস্থার সাধারণ ধারণা হ'ল যে তা এমন একটি অবস্থা নির্দেশ করে যেখানে সংশ্লিষ্ট সকল ব্যক্তি বা গোষ্ঠীর ইচ্ছা যথাযথভাবে পূর্ণ হয়েছে। অর্থাৎ সেই অবস্থার থেকে কোনো ব্যক্তি বা গোষ্ঠী আর কোনো পরিবর্তন চাইবে না। অতএব বাস্তবে ঐ অবস্থাটি স্থায়ী হতে পারবে। প্রতিকল্পের সমীকরণগুলি যদি বিভিন্ন ব্যক্তি বা গোষ্ঠীর আচরণ সম্পর্কিত কল্পনার সমষ্টি হয় তাহলে সংশ্লিষ্ট সকলের ইচ্ছা যথাযথ পূর্ণ হতে পারে যদি সমীকরণগুলির একত্রে কোনো সমাধান থাকে। অতএব সহসমীকরণ ব্যবস্থা হিসেবে প্রতিকল্পের সমীকরণগুলির যে-সমাধান তাকেই প্রতি-কল্পের সাম্যাবস্থা বলা যেতে পারে। প্রতিকল্পটি যদি স্থিতাবস্থার প্রতিকল্প হয় তাহলে ঐ সাম্যাবস্থাকে **স্থিতিসাম্য** বলে। $f_j(x_1, \ldots, x_n)=0$ এই সমীকরণগুলির সহসমাধান মনে করা যাক $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ অর্থাৎ চলগুলির এই মানে সমীকরণগুলি সবই একত্রে অভেদে পরিণত হবে। $\bar{x}_1 \ldots, \bar{x}_n$ এই মানগুলি আলোচ্য প্রতিকল্পের স্থিতিসাম্য।

3. স্থিতিসাম্যের অস্তিত্ব ও একত্ব

স্থিতাবস্থার প্রতিকল্প বিশ্লেষণে প্রথম যে-দুটি সমস্যা সবচেয়ে গুরুত্বপূর্ণ তা হ'ল স্থিতিসাম্যের অস্তিত্ব ও একত্ব। স্থিতিসাম্যের যে সংজ্ঞা উপরে দেওয়া হয়েছে তার থেকে অস্তিত্বের সমস্যাটি সহজে পরিষ্কার হতে পারে। কোনো প্রতিকল্পে স্থিতিসাম্যের অস্তিত্ব আছে কিনা তা স্বভাবতই

নির্ভর করছে ঐ প্রতিকল্পের সমীকরণগুলির কোনো সহসমাধান সম্ভব কি না তার উপর। সম্ভব হলে প্রতিকল্পের স্থিতিসাম্য অবশ্যই বর্তমান। কাজেই অস্তিত্বের প্রশ্ন বিচারে প্রতিকল্পের সমীকরণগুলির সমাধান-যোগ্যতা বিচার করতে হবে। সমীকরণগুলির সমাধান সম্ভব কিনা তা নির্ভর করে মূলত সমীকরণগুলির প্রকৃতি এবং চল ও স্বাধীন সমীকরণের পারস্পরিক সংখ্যার উপর। প্রতিকল্পটিকে যদি এমনভাবে নির্মাণ করা যায় যে প্রত্যেকটি সমীকরণের বিশিষ্ট রূপ স্পষ্ট ক'রে নির্দেশ করা সম্ভব তাহলে সমাধানযোগ্যতার বিচার অনেক সহজ হয়ে পড়ে। অনেক ক্ষেত্রে সমীকরণগুলিকে একেবারে সরাসরি সমাধান ক'রে দেখে নেওয়া চলে যে সমাধান সম্ভব কিনা। কিন্তু এই প্রত্যক্ষ পদ্ধতি অনেক ক্ষেত্রেই ব্যবহার করা চলে না।

প্রথমত, প্রতিকল্পে সমীকরণের সংখ্যা অনেক সময়ে এত বেশি হতে পারে যে বাস্তবে সরাসরি সমাধান অসম্ভব না হ'লেও সময় ও পরিশ্রম সাপেক্ষ। অবশ্য আধুনিক কম্পিউটার-এর যুগে এই সমস্যা খুব বড়ো অসুবিধার সৃষ্টি করার কারণ নেই। সংখ্যাধিক্য ছাড়াও সমীকরণের সরাসরি সমাধানের প্রসঙ্গে অন্য একটি আপত্তি লক্ষণীয়। সরাসরি সমাধান করার প্রয়োজনে সমীকরণগুলির বিশিষ্ট রূপ ধ'রে নিতে হবে। সমীকরণের বিশিষ্ট রূপের ভিত্তিতে যে-প্রতিকল্প নির্মাণ করা হয় তার প্রয়োগক্ষেত্র তুলনায় সীমিত হতে বাধ্য। কারণ, যে-সব ক্ষেত্রে সমীকরণগুলির ঐ বিশিষ্ট রূপ সিদ্ধ, মাত্র সেইসব ক্ষেত্রেই ঐ প্রতিকল্পের সিদ্ধান্তগুলি প্রযোজ্য। যেমন কোনো প্রতিকল্পে হয়ত ভোগ ও আয়ের মধ্যে একটি ঋজুরৈখিক সম্পর্ক কল্পনা করা হয়েছে। কিন্তু কোনো নির্দিষ্ট অর্থ-নৈতিক বাস্তবে ভোগ ও আয়ের যথার্থ সম্পর্ক যদি দ্বিঘাত হয় তাহলে ঋজুরৈখিক প্রতিকল্পের সিদ্ধান্ত সেখানে অচল। কিন্তু বদলে, মনে করা যাক, প্রতিকল্পের সিদ্ধান্তগুলি এমন কোনো অবস্থার থেকে গ্রহণ করা গেল যেখানে ভোগ ও আয়ের সম্পর্ক ঋজুরৈখিক বা দ্বিঘাত এতো নির্দিষ্ট ক'রে বলার দরকার নেই: শুধুমাত্র সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকটির এমন কিছু গুণাবলির কল্পনা করা হ'ল যা ঋজুরৈখিক বা দ্বিঘাত দু'রকমের সমীকরণের পক্ষেই প্রযোজ্য। এই প্রতিকল্পের সিদ্ধান্তের প্রয়োগ ক্ষেত্র কিন্তু অনেক বেশি বিস্তৃত।

প্রতিকল্পের সমীকরণগুলির বিশিষ্ট রূপ গ্রহণ ক'রে বিশ্লেষণ করতে পারলে সিদ্ধান্ত স্পষ্টতর হবার সম্ভাবনা নিশ্চয়ই থাকে। এবং সেই সিদ্ধান্ত তথ্যের পর্যবেক্ষণের সঙ্গে না মিললে ঐ বিশিষ্ট রূপ পরিবর্তন ক'রে অন্য বিশিষ্ট রূপ গ্রহণ করা যেতে পারে। এইভাবে একে একে

বিভিন্ন বিশিষ্ট রূপের ভিত্তিতে বিশ্লেষণ এবং পুনঃ পুনঃ তথ্যের পর্যবেক্ষণের ফলে চলগুলির মধ্যেকার যথার্থ বিশিষ্ট রূপ খুঁজে পাওয়া যেতে পারে। তবে একাজ স্বভাবতই শুধু তাত্ত্বিক বিশ্লেষণের কাজ নয়। যথেষ্ট বাস্তব পর্যবেক্ষণ ব্যতীত এই বিশিষ্ট রূপের সন্ধান পাওয়া সম্ভব নয়। অর্থনীতির বর্তমান স্তরের অগ্রগতিতে সেই পর্যায়ে এখনো পৌঁছনো সম্ভব হয়নি। তবে বিভিন্ন প্রতিকল্পের প্রসঙ্গে চলগুলির মধ্যেকার বিশিষ্ট সম্পর্কের অনুসন্ধান চলছে। এবং আশা করা যেতে পারে যে, ভবিষ্যতে এমন সময় আসবে যখন অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের তাত্ত্বিক সিদ্ধান্ত অর্থনৈতিক বাস্তবের প্রকৃত ঘটনাবলিকে আরো নিখুঁত-ভাবে বর্ণনা করতে সমর্থ হবে।

অর্থনৈতিক চলগুলির মধ্যেকার বিশিষ্ট রূপের অভাবে সাধারণ রূপের ভিত্তিতেই তাত্ত্বিক প্রতিকল্প গড়ে তুলতে হবে। এবং সেই তত্ত্ব বিশ্লেষণে সমীকরণগুলির সরাসরি সমাধানের অবকাশ তুলনায় কম। সেই কারণে সমীকরণগুলির সমাধানের অস্তিত্ব প্রসঙ্গে তাত্ত্বিক যুক্তি অবতারণার প্রয়োজন পড়ে। সমীকরণগুলির কিছু সাধারণ ধর্ম এই তাত্ত্বিক যুক্তির ভিত্তি। অর্থাৎ প্রতিকল্পের অন্তর্ভুক্ত f_i-অপেক্ষকগুলির যে-সব সাধারণ ধর্ম কল্পনা করা হয় তার ভিত্তিতেই সমীকরণগুলির সহসমাধান আছে কিনা তা বিচারের প্রয়োজন পড়ে। সমীকরণগুলির সহসমাধান প্রমাণ করতে পারলে একথা বলা চলে যে প্রাসঙ্গিক বাস্তবের স্থিতিসাম্য বর্তমান।

সমীকরণগুলির সহসমাধান বা বাস্তবের স্থিতিসাম্যের অস্তিত্ব প্রমাণ করতে পারার পরেও কিন্তু একটি জরুরী প্রশ্ন থাকে। সমাধানের অস্তিত্ব থাকলেই এমন কোনো কথা নেই যে একটি সহসমীকরণ ব্যবস্থার একটিই মাত্র সমাধান থাকবে। অর্থাৎ প্রাসঙ্গিক বাস্তবের স্থিতিসাম্য হয়ত বর্তমান কিন্তু একাধিক স্থিতিসাম্য সম্ভব কিনা সে প্রশ্নও বিবেচ্য। এই প্রশ্ন আলোচনার জন্য প্রতিকল্পের সমাধান এবং তার একত্ব বিচারের প্রয়োজন পড়ে। কোনো প্রতিকল্পের যদি একাধিক সমাধান থাকে তাহলে সংশ্লিষ্ট বাস্তবের একাধিক স্থিতিসাম্য সম্ভব। অর্থাৎ পর্যবেক্ষণের ফলে ঐ বাস্তব প্রসঙ্গে যে কোন স্থিতিসাম্যের তথ্য পাওয়া যাবে তা জোর ক'রে আগে থেকে বলা যায় না। প্রতিকল্প নির্মাণের যে-মূল উদ্দেশ্য, অর্থ-নৈতিক বাস্তবের সুসমঞ্জস বর্ণনা, তা সাধন করতে গেলে প্রতিকল্পের তত্ত্ব সিদ্ধান্তগুলি সম্পর্কে স্পষ্ট ধারণা লাভ করা প্রয়োজন। প্রতিকল্পের একটিই মাত্র সমাধান বর্তমান এরকম সিদ্ধান্তের তাৎপর্য এখানে যে পর্যবেক্ষণের তথ্যের সঙ্গে তা সরাসরি মিলিয়ে নিতে সুবিধা হয়।

4. সাম্যাবস্থার সুস্থিতি

স্থিতিসাম্যের চরিত্র পুরোপুরি নির্ণয় করতে গেলে তার অস্তিত্ব ও একত্বের বিশ্লেষণ যেমন প্রয়োজন তেমনি তার সুস্থিতির বিশ্লেষণও প্রয়োজন। সুস্থিতির বিশ্লেষণ অর্থনৈতিক বাস্তব সম্পর্কে জ্ঞানলাভ করার পথে কেন প্রয়োজনীয় তা জানবার আগে সুস্থিতির ধারণা এবং সংজ্ঞা পরিষ্কার ক'রে বুঝে নেবার দরকার। মনে করা যাক $\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n$ হ'ল আমাদের প্রতিকল্পের একটি সাম্যাবস্থা। অর্থাৎ প্রতিকল্পের চলগুলি যখন যথাক্রমে $\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n$ এই মান গ্রহণ করে তখন প্রতিকল্পের সব সমীকরণ একযোগে সিদ্ধ। সংশ্লিষ্ট ব্যক্তি বা গোষ্ঠীর কেউ তখন আর কোনো পরিবর্তন চাইছে না। এবার যে-কোনো কারণেই হোক এই সাম্যাবস্থা থেকে যদি কিছুটা বিচ্যুতি ঘটে তাহলে কি হবে? সাম্যাবস্থার বিচ্যুতি নানা কারণে ঘটতে পারে। মনে করা যাক বহিরাগত যে-কোনো কারণের জন্য সাম্যাবস্থার কিছুটা বিচ্যুতি ঘটলো। অর্থাৎ প্রতিকল্পের চলগুলির মান $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ এর বদলে $\bar{x}_1 \pm \epsilon_1, \ldots, \bar{x}_n \pm \epsilon_n$-এ দাঁড়াল। $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ হ'ল সাম্যাবস্থার মানের থেকে বিচ্যুতির পরিমাণ। যে-চলের জন্য বিচ্যুত মান সাম্যমানের চেয়ে বেশি সেই চলের বেলায় ε-এর চিহ্ন হবে ধনাত্মক এবং যে-চলের জন্য বিচ্যুত মান সাম্যমানের চেয়ে কম সেই চলের বেলায় ε-এর চিহ্ন হবে ঋণাত্মক। এখন প্রশ্ন হলঃ এই সাম্যাবস্থার থেকে বিচ্যুতির পরিণাম কি হবে? সময়ের সঙ্গে সঙ্গে বিচ্যুত মান যদি সাম্যমানের দিকে ফিরে যায় তাহলে সাম্যাবস্থাকে বলা হয় **সুস্থিত** সাম্যাবস্থা আর যদি না যায় তাহলে সাম্যাবস্থাকে বলা হয় **অ-স্থিত** সাম্যাবস্থা। অর্থাৎ $t \rightarrow \infty$ হ'লে যদি $\epsilon_i \rightarrow 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$ হয় তাহলে সাম্যাবস্থাকে বলা হয় সুস্থিত। সংজ্ঞাটিকে একটু অন্যভাবেও বলা যেতে পারে। $x_1, \ldots, x_n$ যদি চলগুলির যে-কোনো মান হয় (অন্তত প্রত্যেকটি i-এর জন্য $x_i = \bar{x}^i$ নয়), তাহলে সুস্থিত সাম্যাবস্থার জন্য যা প্রয়োজন তা হ'লঃ $t \rightarrow \infty$ হ'লে $x_i \rightarrow \bar{x}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$।

উপরের সংজ্ঞা থেকে দুটি কথা স্পষ্ট বেরিয়ে আসছে। প্রথম, সুস্থিতির বিশ্লেষণে সাম্যাবস্থার বিচ্যুতি কল্পনা করা একান্ত প্রয়োজন। সাম্যাবস্থা একবার প্রতিষ্ঠিত হবার পরে আর যদি কোনো পরিবর্তন না আসে বা না আসতে পারে এমন নিশ্চিত হওয়া যায় তাহলে সুস্থিতির বিচারের কোনো মানে নেই বা তা সম্ভব নয়। এখানে মূল প্রশ্ন হচ্ছে সাম্যাবস্থার বিচ্যুতি হলে কি হবে? আবার কি পুরনো সাম্যাবস্থা ফিরে পাওয়া যাবে? যদি যায় তাহলে সাম্যাবস্থার চরিত্র একরকম আর যদি না

যায় তাহলে সাম্যাবস্থার চরিত্র অন্যরকম। অর্থাৎ, সুস্থিতির বিচারে সাম্যাবস্থার বিচ্যুতি কল্পনা বা অ-সাম্যাবস্থার কল্পনা অবশ্য প্রয়োজনীয়। দ্বিতীয়, সুস্থিতির বিশ্লেষণে সময়ের ভূমিকা প্রত্যক্ষ। কারণ অসাম্যাবস্থা বা বিচ্যুত সাম্যাবস্থা থেকে প্রতিকল্প আবার সাম্যাবস্থায় ফিরবে কিনা তা নির্ভর করবে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে প্রতিকল্পের চলগুলির গতিবিধির উপর। এই কারণে সুস্থিতি সম্পর্কে ধারণা গড়ে তুলতে গেলে অসাম্যাবস্থায় চলগুলির সময়সাপেক্ষ আচরণ সম্বন্ধে আলাদা কল্পনার বা অঙ্গীকারের প্রয়োজন পড়ে। স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণের সঙ্গে অঙ্গাঙ্গীভাবে জড়িত হলেও সুস্থিতির বিশ্লেষণ যথার্থ বলতে গেলে ঠিক স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণের অংশ নয়—তা মূলত চলিতাবস্থার বিশ্লেষণের অংশ।

সুস্থিতির যে-ধারণা এখানে বলা হ'ল তার মূল কথা হ'ল সাম্যাবস্থায় প্রত্যাবর্তন। একটি কল্পিত উদাহরণের সাহায্যে এই ধারণাটিকে আরো একটু পরিষ্কার করা যেতে পারে। মনে করা যাক একটি টেবিলের উপর ছোট একটি পেন্সিল দাঁড় করানো আছে। পেন্সিলটির দাঁড়িয়ে থাকা স্থিতিসাম্যের একটি উদাহরণ। এখন, মনে করা যাক, আঙুলের ছোট একটু টোকায় পেন্সিলটির স্থিতিসাম্যে ব্যাঘাত ঘটানো হ'ল। টোকাটি যদি সত্যিই ছোট হয়, পেন্সিলের গোড়াটা যদি খুব সরু না হয়, বাইরের হাওয়া ইত্যাদির অসুবিধা যদি একেবারেই না থাকে, তবে একটু আধটু কেঁপে পেন্সিলটি আবার পুরনো অবস্থায় স্থির দাঁড়াবে। এই ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থাকে বলে সুস্থিত সাম্যাবস্থা। কিন্তু ঐ রকম টোকার (অর্থাৎ ব্যাঘাতের) ফলে পেন্সিলটি যদি পড়ে যায় তাহলে সেই সাম্যাবস্থাকে বলে অস্থিত সাম্যাবস্থা।

সাম্যাবস্থার সুস্থিতির যে-ধারণা উপরে বলা হ'ল সেই ধারণা অনুসরণ ক'রে অন্তত দু'রকম সুস্থিতির কথা কল্পনা করা যেতে পারে। সাম্যাবস্থার সুস্থিতি বিচার করার জন্য একটা প্রাথমিক বিচ্যুতি কল্পনা করার প্রয়োজন পড়ে। যদি এমন হয় যে এই প্রাথমিক বিচ্যুতি খুব ছোট হলেই তবে সাম্যাবস্থার প্রত্যাবর্তন নিশ্চিত তাহলে সেই সুস্থিতিকে বলে **স্থানীয় সুস্থিতি**। আর প্রাথমিক বিচ্যুতি ছোট বড় যাই হোক না কেন সাম্যাবস্থার প্রত্যাবর্তন যদি নিশ্চিত হয় তাহলে সেই সুস্থিতিকে বলে **সার্বিক সুস্থিতি**। একটা কথা এই সংজ্ঞার থেকে সরাসরি বলা চলে। কোনো সাম্যাবস্থা যদি সার্বিক অর্থে সুস্থিত হয় তাহলে স্থানীয় অর্থেও তা সুস্থিত হবে। যদিও এর উল্টোটা সব সময়ে নাও হতে পারে। উপরে যে কল্পিত পেন্সিলের উদাহরণের কথা বলা হয়েছে সেই প্রসঙ্গে বলা চলে যে দাঁড়িয়ে থাকা অবস্থায় পেন্সিলটিকে মাত্র সামান্য একটু টোকা দেওয়া

হলে যদি সে নড়াচড়ার পরে পুনরায় পূর্বের দাঁড়ানো অবস্থায় ফিরে আসে তাহলে পেন্সিলের সুস্থিতিকে বলা হবে স্থানীয় অর্থে সুস্থিত। আর পেন্সিলটিকে যদি জোরে (তা সে যত জোরেই হোক না কেন) ধাক্কা দিলেও সে তার সাম্যাবস্থা ফিরে পায় তাহলে সেই সুস্থিতিকে বলা হবে সার্বিক সুস্থিতি। স্পষ্টত দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে পেন্সিল যদি জোরে ধাক্কা পেয়েও সাম্যাবস্থায় ফিরে আসতে পারে, তাহলে ছোট টোকার পরেও সে অবশ্যই সাম্যাবস্থায় ফিরে আসতে পারবে। অর্থাৎ সাম্যাবস্থার যদি সার্বিক সুস্থিতি থাকে তাহলে স্থানীয় সুস্থিতি অবশ্যই থাকবে। যদিও এমন কথা বলা চলে না যে ছোট টোকার পরে সাম্যাবস্থা ফিরে পাচ্ছে বলে বড় ধাক্কার পরেও তা পাবে। তাই স্থানীয় সুস্থিতি থাকলেও সার্বিক সুস্থিতি নাও থাকতে পারে।

উপরের আলোচনার ভিত্তিতে এবার সুস্থিতির দু'টি ধারণারই স্পষ্ট সংজ্ঞা নির্দেশ করা সম্ভব। আমরা আগেই দেখেছি যে সুস্থিতির বিচার করার জন্য আমাদের আলোচ্য প্রতিকল্পটিকে বা তার অন্তর্গত নির্ণেয় চলগুলিকে অবশ্যই সময় সাপেক্ষ হিসেবে বিবেচনা করা দরকার। মনে করা যাক $x_1, \ldots, x_n$ আমাদের প্রতিকল্পের নির্ণেয় চল এবং $\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n$ হ'ল ঐ চলগুলির সাম্যাবস্থার মান। সেক্ষেত্রে এই চল-গুলির সময় সাপেক্ষ গতিবিধির বর্ণনার জন্য আমরা যে-তাত্ত্বিক ব্যবস্থা গ'ড়ে তুলেছি তার বর্ণনা, মনে করা যাক, $F(x_1, \ldots, x_n; t)$। এখন যদি দেখা যায় যে নির্ণেয় চলগুলির যে-কোনো মান $x_1, \ldots, x_n$-এর জন্য $\lim_{t\to\infty} F(x_1, \ldots, x_n; t) = \bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n$ তাহলে $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ সাম্যাবস্থাটি সার্বিক অর্থে সুস্থিত। আর তা না হয়ে যদি $\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n$ এর চারপাশে খুব ঘনিষ্ঠ দূরত্বে চলগুলির কোনো মান $x_1, \ldots, x_n$-এর জন্য $\lim_{t\to\infty} F(x_1, \ldots, x_n; t) = \bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_n$ তাহলে সাম্যাবস্থাটিকে বলা হবে স্থানীয় অর্থে সুস্থিত।

এখন প্রশ্ন হ'ল সুস্থিতির বিশ্লেষণ থেকে সংশ্লিষ্ট বাস্তবের সম্পর্কে কোন নতুন ধারণা আমরা পেতে পারি? সুস্থিতির সংজ্ঞা থেকেই এর উত্তর এখন পাওয়া যাবে। যে-কোনো অর্থনৈতিক প্রক্রিয়া যখন শুরু হয় তখন সেই প্রক্রিয়ার অন্তর্গত চলগুলি যে তাদের নিজ নিজ সাম্যমান নিয়েই শুরু হবে এমন কোনো কথা নেই। কাজেই সেক্ষেত্রে এটা জানা প্রয়োজন যে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে প্রক্রিয়াটি এমনভাবে পরিবর্তিত হবে কিনা যাতে ক'রে সাম্যাবস্থায় পৌঁছতে পারে। যদি দেখা যায় যে প্রক্রিয়াটি এমন যে অ-সাম্যাবস্থা থেকে শুরু করলে সাম্যাবস্থায় পৌঁছবার আর কোনো সম্ভাবনা

নেই তাহলে বাস্তবে সেই প্রক্রিয়া আমরা কখনো আদৌ পর্যবেক্ষণ না করতে পারি। কোনো অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের সাম্যাবস্থার অস্তিত্ব যদি প্রমাণ করা সম্ভবও হয় শুধুমাত্র তার থেকে কিন্তু একথা বলা চলে না যে, ঐ প্রতিকল্প অনুসারী কোনো বাস্তব যদি থাকে তবে তা আমরা পর্যবেক্ষণ করতে পারব। অর্থাৎ পর্যবেক্ষণীয় যে-বাস্তব তা যে আমাদের প্রতিকল্প অনুসারী তা বলা চলে না। কিন্তু যদি সাম্যাবস্থা সুস্থিত বলে জানা থাকে তাহলে বলা চলে যে প্রতিকল্পে কল্পিত অর্থনৈতিক প্রক্রিয়া পর্যবেক্ষণযোগ্য হবেই। কারণ প্রক্রিয়াটি যেখান থেকেই শুরু হয়ে থাক (অথবা বহিরাগত কোন প্রভাবে তা যদি সাম্যাবস্থা থেকে বিচ্যুত হয়েও থাকে) কোনো না কোনো সময়ে তা সাম্যাবস্থায় এসে পেঁছবে। অর্থাৎ যথেষ্ট দীর্ঘ সময় অপেক্ষা করতে পারলে প্রক্রিয়াটিকে আমরা সাম্যাবস্থায় পাবই। অর্থনৈতিক প্রতিকল্পে সুস্থিতির বিশ্লেষণ আরো অন্য তাত্ত্বিক কারণে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। সে আলোচনা পরের অংশে করা হবে।

5. তুলনামূলক স্থিতাবস্থা

স্থিতাবস্থার প্রতিকল্প হিসেবে আমরা n-সংখ্যক চল ও তাদের মধ্যেকার m-সংখ্যক গাণিতিক সম্পর্কের একটি ব্যবস্থাকে গ্রহণ করেছি। সম্পর্কগুলিকে আমরা সাধারণ ক্ষেত্রে সমীকরণ হিসেবে প্রকাশ করব। প্রয়োজন মত অসমীকরণ হিসেবে প্রকাশ করাতেও কোনো বাধা নেই। একটু চিন্তা করলে দেখা যাবে যে, সমীকরণ বা অসমীকরণ যাই হোক না কেন আমাদের গাণিতিক সম্পর্কগুলির মধ্যে নানারকমের প্যারামিটার অবশ্যই থাকবে। বস্তুত সম্পর্কগুলির কোনো বিশিষ্ট রূপ কল্পনা করতে গেলেই চলগুলিকে প্যারামিটার-এর মধ্য দিয়ে পরস্পর অন্বিত করতে হবে। দুটি চল x_1 এবং x_2-এর মধ্যে ধরা যাক একটি সম্পর্ক হ'ল যে, x_1 এবং x_2 সমান। সেক্ষেত্রে $x_1 = x_2$ এই সম্পর্কের মধ্যেও একটি প্যারামিটার, ধরা যাক a, বর্তমান। এই প্যারামিটার-এর মান সর্বদাই 1। $x_1 = ax_2\ (a = 1)$ এই সহজ সম্পর্কটিকে নিহিত রূপে লিখলে হবে $f(x_1, x_2) = 0$। প্যারামিটার-এর অস্তিত্ব স্পষ্ট করে দেখাতে গেলে সম্পর্কটিকে লিখতে হবে $f(x_1, x_2, a) = 0$। এই উদাহরণের ভিত্তিতে একথা বলা চলে যে আমাদের প্রতিকল্পের মধ্যে চল ও গাণিতিক সম্পর্ক ছাড়াও আর একটি তৃতীয় উপাদান বর্তমান। তা হ'ল প্যারামিটার। স্থিতাবস্থার প্রতিকল্পকে তাহলে এমনভাবে বর্ণনা করা চলে যে তার মধ্যে n-সংখ্যক চল, m-সংখ্যক গাণিতিক সম্পর্ক ও p-সংখ্যক প্যারামিটার বর্তমান। সম্পর্ক-

গুলির নিহিতরূপে প্রতিকল্পের সাধারণ চেহারা তাহলে দাঁড়াচ্ছেঃ

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_p)=0 \\ f_2(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_p)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_p)=0 \end{array}\right\} \ldots(5\cdot 1)$$

প্রত্যেক সমীকরণের মধ্যে প্রত্যেক প্যারামিটার উপস্থিত থাকবেই এমন কোনো কথা নেই। অর্থাৎ কোনো কোনো সমীকরণে কোনো কোনো প্যারা-মিটার-এর মান সর্বদাই শূন্য হতে পারে। কোনো চলের সঙ্গে জড়িত প্যারামিটার-এর মান শূন্য হ'লে তার অর্থ হবে যে ঐ সমীকরণে ঐ চলটি অনুপস্থিত। অর্থাৎ সমীকরণের নির্ভরশীল চলের উপর ঐ বিশেষ স্বাধীন চলটির কোনো প্রভাব আছে ব'লে মনে করা হচ্ছে না।

প্রতিকল্পের সাম্যাবস্থা নির্ধারণ করতে গেলে সমীকরণগুলিকে এক-যোগে সমাধান করতে হবে। সেক্ষেত্রে অবশ্যই আমাদের কল্পনা ক'রে নিতে হবে যে প্রতিকল্পের প্যারামিটারগুলির মান নির্দিষ্ট করা আছে, সমস্ত প্যারামিটারের এক সেট নির্দিষ্ট মানের জন্যই কেবল আমরা চল-গুলির এক সেট নির্দিষ্ট সাম্যাবস্থার মান পেতে পারি। মনে করা যাক $\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$ এইরকম এক সেট সাম্যাবস্থার মান। সহজেই দেখা যাচ্ছে যে এই নির্দিষ্ট মানগুলি প্যারামিটারগুলির এক সেট নির্দিষ্ট মান, ধরা যাক, $a^\circ_1, \ldots, a^\circ_p$-এর উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ $a^\circ_1, \ldots, a^\circ_p$ এই মানগুলি বদলে যদি প্যারামিটারগুলির মান নেওয়া যেত $a_1', \ldots, a_p'$, তাহলে চলগুলির সাম্যাবস্থার মানও বদলে যেত। কারণ সেক্ষেত্রে সমীকরণগুলির বিশিষ্ট রূপের বদল ঘটত। চলের সাম্যমান যদি প্যারা-মিটার-এর নির্দিষ্ট মানের উপর নির্ভরশীল হয় তাহলে প্রতিকল্পের সাম্যাবস্থার পূর্ণ বর্ণনা হবেঃ

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x}_1 = x_1(a_1^0, \ldots, a_p^0) \\ \bar{x}_2 = x_2(a_1^0, \ldots, a_p^0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{x}_n = x_n(a_1^0, \ldots a_p^0) 1 \end{array}\right\} \ldots(5\cdot 2)$$

(5·2) -এর অপেক্ষকগুলি থেকে প্যারামিটার-এর পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে চলগুলির সাম্যমানের পরিবর্তন বিশদভাবে জানতে পারা যায়। $x_1, \ldots, x_n$ এই অপেক্ষকগুলির নিরবচ্ছিন্নতা ও কলনীয়তা গুণ থাকলে আংশিক ডেরিভেটিভের সাহায্যে আমরা জানতে পারি যে প্যারামিটার-গুলির পরিবর্তনের সঙ্গে চলগুলির সাম্যমান $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ কি হারে এবং

কোন দিকে পরিবর্তিত হবে। মনে করা যাক $\partial x_i/\partial a_k$ হ'ল k-তম প্যারামিটার-এর পরিবর্তনজনিত i-তম চলের পরিবর্তন হার। (5·2)-এর অপেক্ষকগুলির পরিপ্রেক্ষিতে বলা চলে যে এরকম আংশিক ডেরিভেটিভের সংখ্যা হবে np। এই np-সংখ্যক রাশিগুলি ধনাত্মক কি ঋণাত্মক তা জানতে পারলে আমাদের প্রতিকল্পের চলগুলির আচরণবিধি সম্বন্ধে খুব জরুরি সিদ্ধান্তে পেঁছিনো যাবে। $\partial x_i/\partial a_k$ ধনাত্মক হ'লে তার অর্থ হবে যে k-তম প্যারামিটার-এর বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে i-তম চলের সাম্যমান বৃদ্ধি পাবে। আর $\partial x_i/\partial a_k$ ঋণাত্মক হলে তার অর্থ হবে যে k-তম প্যারামিটার এবং i-তম চলের গতি বিপরীতমুখী, অর্থাৎ একটা বাড়লে অন্যটা কমবে। প্যারামিটার-এর পরিবর্তনের সঙ্গে চলের সাম্যমানের পরিবর্তন নিয়ে এই যে বিশ্লেষণ একে বলা হয় তুলনামূলক স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ।

অর্থনৈতিক বাস্তব সম্পর্কে ধারণা গ'ড়ে তুলতে গেলে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ বিশেষ প্রয়োজনীয়। কারণ, অর্থনৈতিক বাস্তবের তথ্য পর্যবেক্ষণ করলে আমরা যা পেতে পারি তা হ'ল বাস্তবের বিভিন্ন চলের পারস্পরিক গতিবিধি সংক্রান্ত কিছু সম্পর্ক। যেমন, যে-কোনো বাজারের অবস্থা যদি আমরা পর্যবেক্ষণ করি তাহলে দ্রব্যমূল্যের হ্রাস-বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে ক্রেতার বা বিক্রেতার ক্রয় বা বিক্রয় কিভাবে বাড়ে কমে তা লক্ষ্য করতে পারি। তেমনি ক্রেতার আয়ের হ্রাসবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে তার মোট চাহিদার কি পরিবর্তন হয় তাও আমরা তথ্য পর্যবেক্ষণ থেকে জানতে পারি। অর্থনৈতিক প্রতিকল্পের সাহায্যে আমরা যদি এই-সব গতিবিধি সম্পর্কে একটা সুসমঞ্জস ব্যাখ্যা বা বর্ণনা দাঁড় করাতে চাই তাহলে শুধু স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণে তা সম্ভব না। কারণ, স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ থেকে আমরা চলগুলির নির্দিষ্ট সাম্যমান মাত্র পেতে পারি। তার থেকে একটি চলের পরিবর্তনের ফলে অন্য চলের পরিবর্তন হবে কিনা বা কেমন পরিবর্তন হবে তা জানতে পারি না। তাই পর্যবেক্ষণীয় তথ্যের মধ্যে যে-সব চলগুলির গতিবিধি আমরা দেখতে পাচ্ছি তাদের মধ্যে কোনো কোনো চলকে প্যারামিটার হিসেবে অন্তর্ভুক্ত ক'রে তাদের উপর নির্ভরশীলভাবে অন্য চলগুলির সাম্যমান নির্ধারণ করতে হয়। এবং এই স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণকে আরো এগিয়ে নিয়ে গিয়ে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ করলে তবে একটি রাশির পরিবর্তনজনিত অন্য রাশির পরিবর্তন সম্বন্ধে স্পষ্ট সিদ্ধান্ত পেতে পারি। লক্ষণীয় যে এই সিদ্ধান্ত পুরোপুরি তাত্ত্বিক সিদ্ধান্ত। এই সিদ্ধান্ত তাত্ত্বিক গ্রাহ্য কিনা তা নির্ভর করবে পর্যবেক্ষণীয় তথ্য থেকে সংশ্লিষ্ট রাশিগুলির পরিবর্তন সংক্রান্ত যে-

তথ্য পাওয়া যায় তার সঙ্গে তাত্ত্বিক বিশ্লেষণ থেকে পাওয়া সিদ্ধান্তের মিল হয় কিনা তার উপর।

তুলনামূলক স্থিতাবস্থা পদ্ধতির একটি সুন্দর প্রয়োগ ক্ষেত্র আমরা পাই ব্যক্তির চাহিদা তত্ত্বের প্রসঙ্গে। ব্যক্তির চাহিদা বিশ্লেষণ করবার জন্য আমরা সাধারণত তার আয় এবং দ্রব্যাদির মূল্যগুলিকে প্যারামিটার হিসাবে গ্রহণ করি। স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণে এই প্যারামিটারগুলির নির্দিষ্ট মানের ভিত্তিতে বিভিন্ন দ্রব্যের জন্য ব্যক্তির চাহিদার সাম্যাবস্থা, অর্থাৎ সাম্যাবস্থার শর্ত, নির্ধারণ করা হয়। তারপর তুলনামূলক স্থিতাবস্থা পদ্ধতির সাহায্যে দ্রব্যমূল্য বা ব্যক্তির আয়ের পরিবর্তনের সঙ্গে তার চাহিদার সাম্যমানের পরিবর্তন নির্ণয় করা হয়। এই বিশ্লেষণ থেকে আমরা ব্যক্তির মূল্য-চাহিদা রেখা বা আয়-চাহিদা রেখা নির্মাণ করতে পারি। এই চাহিদা রেখার বিভিন্ন ধর্ম পর্যবেক্ষণীয় তথ্যের সঙ্গে মিলিয়ে নিতে পারা যায় এবং সেই ভিত্তিতেই কেবল আমরা বিচার করতে পারি যে আমাদের প্রতিকল্পের অন্তর্গত অঙ্গীকারগুলি ভোক্তার আচরণের গ্রহণযোগ্য বর্ণনা হতে পারে কিনা। চাহিদা তত্ত্বের আলোচনা প্রসঙ্গে এই পদ্ধতির প্রয়োগ বিশদভাবে আলোচনা করা হবে।

অর্থনৈতিক বাস্তব সম্বন্ধে সম্যক ধারণা গ'ড়ে তোলবার পথে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার ভূমিকা উপরের আলোচনা থেকে বুঝতে পারা গেল। তুলনামূলক স্থিতাবস্থার সিদ্ধান্ত স্পষ্ট ক'রে পাবার পক্ষে সুস্থিতির বিশ্লেষণ এক গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। সুস্থিতির বিশ্লেষণের যে-তাত্ত্বিক ভূমিকার কথা আগের অংশে উল্লেখ করা হয়েছে এই প্রসঙ্গে তার পরিচয় পাওয়া যাবে। সুস্থিতি ও তুলনামূলক স্থিতাবস্থার এই যোগাযোগ স্পষ্ট ক'রে প্রথম নির্দেশ করেন অধ্যাপক স্যামুয়েলসন্।[1] এই যোগাযোগ সূত্রটিকে তিনি সাদৃশ্য সূত্র নামে অভিহিত করেন। সাদৃশ্য সূত্রের মূল বক্তব্য এই যে অনেক প্রতিকল্পের ক্ষেত্রে সুস্থিতি শর্তের

1 P. A. Samuelson—(i) "The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics"
[*Econometrica*, vol. 9, No. 2, 1941]
(ii) "The Stability of Equilibrium: Linear and Nonlinear Systems"
[*Econometrica*, vol. 10, No. 1, 1942]
(iii) *Foundations of Economic Analysis*
[Cambridge, Harvard University Press, 1947, Chapter IX—XII]

ভিত্তিতে আমরা সেই প্রতিকল্পে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার নির্দিষ্ট সিদ্ধান্তে পেঁছতে পারি। তাহলে সুস্থিতি শর্ত বিভিন্ন রকম হ'লে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার সিদ্ধান্তও বিভিন্ন রকম হতে পারে। তুলনামূলক স্থিতাবস্থার সিদ্ধান্ত যেহেতু সরাসরি পর্যবেক্ষণীয় তথ্যের সঙ্গে মিলিয়ে নেওয়া যেতে পারে, তাই সাদৃশ্য সূত্রের সাহায্যে অন্তর্লীন সুস্থিতি শর্তকেও পরোক্ষভাবে তথ্যের নিরিখে যাচাই করা সম্ভব। এবং এই যোগসূত্রের মধ্য দিয়ে স্থিতাবস্থার মূল প্রতিকল্পে বর্ণিত আচরণবিধি এবং অসাম্যাবস্থায় চলগুলির আচরণ সম্পর্কিত কল্পনা সবই বাস্তব তথ্যের সঙ্গে অন্বিত হতে পারে। সুস্থিতি বিশ্লেষণের তাত্ত্বিক তাৎপর্য তাহলে দাঁড়াল এই যে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার সিদ্ধান্তের তা অন্যতম উৎস। এই উৎস নির্ণয় সাদৃশ্য সূত্রের অবদান।

সাদৃশ্য সূত্রের ভূমিকা ব্যাখ্যা করবার জন্য স্যামুয়েলসন্ একটি উদাহরণ ব্যবহার করেছেন। আমরা নিচে সেই উদাহরণটি সংক্ষেপে আলোচনা করছি। যে-কোনো অর্থনৈতিক বাজারের একটি সরল প্রতি-কল্প কল্পনা করা যাক। মনে করা যাক আমাদের প্রতিকল্পে দ্রব্যের মূল্য p এবং তার পরিমাণ q এই দুটি মাত্র চল। চল দুটির মধ্যে দুটি সম্পর্ক কল্পনা করা হয়েছে। একটিকে আমরা বলছি চাহিদা সম্পর্ক এবং অপরটিকে বলছি যোগান সম্পর্ক। গোটা প্রতিকল্পে চাহিদা সম্পর্কের মধ্যে একটি মাত্র প্যারামিটার নেওয়া হয়েছে a। সম্পর্ক দুটির বিশিষ্ট কোনো রূপ গ্রহণ করা হয়নি। প্রতিকল্পটির পূর্ণ বর্ণনা হ'লঃ

$$\left.\begin{aligned} q - D(p, a) &= 0 \\ q - S(p) &= 0 \\ \frac{\partial D}{\partial p} < 0, \frac{\partial D}{\partial a} &> 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5.3)$$

এখানে প্রাসঙ্গিক তুলনামূলক স্থিতাবস্থার সিদ্ধান্ত দুটি—dq/da এবং dp/da-এর মান নির্ণয় বা চিহ্ন নির্ণয়। আলোচ্য মান দুটি নির্ণয় করার জন্য আমরা $(5 \cdot 3)$-এর প্রথম সমীকরণ দুটিকে একযোগে সমাধান ক'রে q এবং p-এর সাম্যমান নির্ণয় করলাম। মনে করা যাক $\bar{q}$ এবং $\bar{p}$ হ'ল চল দুটির সাম্যমান। এই সাম্যাবস্থায় সমীকরণ দুটির a-এর পরিবর্তনজনিত সামগ্রিক ডেরিভেটিভ্ বার করা হ'লঃ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{q}}{da} &= \frac{\partial D}{\partial \bar{p}} \cdot \frac{d\bar{p}}{da} + \frac{\partial D}{\partial a} \\ \frac{d\bar{q}}{da} &= \frac{ds}{d\bar{p}} \cdot \frac{d\bar{p}}{da} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5.4)$$

অথবা

$$\frac{d\bar{q}}{da} - \frac{\partial D}{\partial \bar{p}} \cdot \frac{d\bar{p}}{da} = \frac{\partial D}{\partial a}$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{da} - \frac{ds}{d\bar{p}} \cdot \frac{d\bar{p}}{da} = 0$$

অথবা

$$\frac{d\bar{q}}{da} = \begin{vmatrix} \frac{\partial D}{\partial a} & -\frac{\partial D}{\partial \bar{p}} \\ 0 & -\frac{ds}{d\bar{p}} \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial D}{\partial \bar{p}} \\ 1 & -\frac{ds}{d\bar{p}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial D}{\partial a} \cdot \frac{ds}{d\bar{p}} \Bigg/ \frac{\partial D}{\partial \bar{p}} - \frac{ds}{d\bar{p}} \qquad \ldots (5.5)$$

এবং

$$\frac{d\bar{p}}{da} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial D}{\partial a} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial D}{\partial \bar{p}} \\ 1 & -\frac{ds}{d\bar{p}} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial D}{\partial a} \Bigg/ \frac{\partial D}{\partial \bar{p}} - \frac{ds}{d\bar{p}} \qquad \ldots (5.6)$$

(5·5) এবং (5·6) -ই হ'ল বর্তমান প্রতিকল্পে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার ফলাফল। এই ফলাফলের ব্যাখ্যা কি হবে? a-র হ্রাস বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে $\bar{q}$ এবং $\bar{p}$ এর গতিবিধি কেমন হবে? এর উত্তর নির্ভর করছে $\frac{d\bar{q}}{da}$ এবং $\frac{d\bar{p}}{da}$ ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক তার উপর। $\frac{d\bar{q}}{da}$ এবং $\frac{d\bar{p}}{da}$ -এর চিহ্ন আবার নির্ভর করছে $\frac{\partial D}{\partial \bar{p}}$ এবং $\frac{ds}{d\bar{p}}$ -এর চিহ্ন এবং তাদের পারস্পরিক মানের উপর। অর্থাৎ মূল্য-চাহিদা রেখা এবং মূল্য-যোগান রেখার স্লোপের উপর এবং স্লোপ দুটির পারস্পরিক মানের উপর। বাজারের সুস্থিতি বিশ্লেষণের প্রাথমিক জ্ঞানের থেকে আমরা জানি যে

ওয়ালরাসীয় অর্থে যদি আলোচ্য বাজার সুস্থিত হয় তাহলে চাহিদা রেখার স্লোপ যোগান রেখার স্লোপের তুলনায় কম। এখন যোগান রেখার স্লোপ যদি ধনাত্মক হয় তাহলে $(5\cdot6)$-এর থেকে দেখা যাচ্ছে যে a-এর বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে দ্রব্যের মূল্য বৃদ্ধি হবেই। a-এর বৃদ্ধি হওয়া মানে চাহিদা বৃদ্ধি হওয়া; কারণ $\frac{\partial D}{da}>0$ অর্থাৎ চাহিদা বাড়লে মূল্যবৃদ্ধি হবে। একই রকমভাবে $(5\cdot5)$-এর থেকে দেখা যাচ্ছে যে চাহিদার বৃদ্ধি হলে দ্রব্যের পরিমাণও বাড়বে। লক্ষণীয় যে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার এই স্পষ্ট সিদ্ধান্ত আমরা সাদৃশ্য সূত্রের ভিত্তিতে পেলাম।

6. চলিতাবস্থার বিশ্লেষণ

শুধুমাত্র স্থিতিসাম্যের বিশ্লেষণ বা তার বিভিন্ন ধর্মের আলোচনা করলেই সংশ্লিষ্ট অর্থনৈতিক বাস্তব সম্পর্কে জ্ঞান লাভ সম্পূর্ণ হ'ল না। কারণ, অর্থনৈতিক বাস্তব যদি একটি সময় সাপেক্ষ প্রক্রিয়া হয় তাহলে সময়ের সঙ্গে সঙ্গে ঐ বাস্তবের পরিবর্তন হবে। নির্বাচিত বাস্তবের প্রতিটি চলকে যদি আমরা আলাদা ক'রে পর্যবেক্ষণ করি তাহলে সময়ের সঙ্গে তারা কিভাবে পরিবর্তিত হচ্ছে তা আমরা লক্ষ্য করতে পারি। এই পরিবর্তনের প্রসঙ্গে বিভিন্ন চলের মধ্যেকার বিভিন্ন রকমের সম্পর্ক দেখা দিতে পারে। যেমন, ধরা যাক কোনো একটি বাস্তবের দুটি চল x_1 এবং x_2 দুইই সময়ের সঙ্গে সঙ্গে বাড়ছে, কিন্তু x_2-এর বৃদ্ধির হার x_1-এর বৃদ্ধির হারের দুই গুণ। এই সম্পর্কটি ঐ দুই চলের চলিতাবস্থার সম্পর্ক। আবার এমন হতে পারে যে x_1 এবং x_2 দুইই এক হারে বাড়ছে; সে ক্ষেত্রে ঐ দুই চলের অনুপাত সময়ের সঙ্গে সঙ্গে বদলাবে না। একথা পরিষ্কার যে বাস্তবটিকে যদি যথাসম্ভব বিশদ করে জেনে নিতে হয় তাহলে চলিতা-বস্থার এই সব আচরণবিধিও আলোচনার অন্তর্ভুক্ত করা দরকার। অর্থ-নৈতিক প্রতিকল্পে চলগুলির এই ধরনের সময়সাপেক্ষ বিশ্লেষণকে বলে চলিতাবস্থার বিশ্লেষণ। চলিতাবস্থার বিশ্লেষণ থেকে আমরা বাস্তবের সম্বন্ধে কি ধরনের প্রয়োজনীয় জ্ঞান লাভ করতে পারি তা চলগুলির বৃদ্ধির হার সম্পর্কিত এই ছোট উদাহরণ থেকেও বুঝতে পারা যাবে। মনে করা যাক আমাদের বাস্তবের x_1 এবং x_2 চল দুটি হ'ল যথাক্রমে সমাজের মোট উৎপাদন এবং মোট জনসংখ্যা। x_2-এর বৃদ্ধির হার যদি x_1-এর বৃদ্ধির হারের দ্বিগুণ হয় তাহলে ভবিষ্যতে সমাজের মোট জনসংখ্যা মোট উৎ-পাদনের তুলনায় অনেক বেশি দাঁড়াবে। অর্থনৈতিক স্বাচ্ছন্দ্য বা দারিদ্র্য ইত্যাদির দিক থেকে এ ধরনের সিদ্ধান্তের গুরুত্ব স্পষ্টতই খুব বেশি।

কিন্তু যদি জানা যায় যে মোট উৎপাদন এবং মোট জনসংখ্যার অনুপাত সময়ের সঙ্গে বদলাবে না, অর্থাৎ দুইই একই হারে বাড়ে, তাহলে ভবিষ্যতে উৎপাদন ও জনসংখ্যার সঙ্কট দেখা দেবার আশঙ্কা থাকে না। এসব সিদ্ধান্ত বাস্তব অর্থনৈতিক জীবনের পক্ষে খুবই জরুরি।

$E = (x_i, f_j)$ এই প্রতিকল্পকেই আমরা চলিতাবস্থার প্রতিকল্প হিসেবে ব্যবহার করতে পারি যদি f_j সম্পর্কগুলির মধ্যে কিছু বিশেষ বৈশিষ্ট্য বর্তমান থাকে। এই বৈশিষ্ট্যের আলোচনা থেকেই চলিতাবস্থার প্রতিকল্পের চরিত্র নির্ধারণ করা যাবে এবং স্থিতাবস্থার প্রতিকল্পের সঙ্গে তার তফাত কোথায় তাও পরিষ্কার হবে। f_j অপেক্ষকগুলির অন্তর্ভুক্ত চলগুলির প্রত্যেকটিই যদি একই সময়ে পরিমাপ করা হয়ে থাকে তাহলে সময়ের পরি-বর্তনের সঙ্গে সঙ্গে চলগুলির গতিবিধি নির্ধারণ করা যায় না। চলিতাবস্থার বিশ্লেষণে যেহেতু সেটাই আমাদের উদ্দেশ্য তাই চলিতাবস্থার প্রতিকল্পের অন্তর্ভুক্ত চলগুলির সব একই সময়ে পরিমাপ করলে চলবে না। উদাহরণ হিসেবে ভোগ ও আয় এই চল দুটির কথা চিন্তা করা যাক। ভোগব্যয়ের সিদ্ধান্ত যে সময়ে নেওয়া হচ্ছে যদি কল্পনা করি যে সেই সিদ্ধান্ত সেই সময়ের আয়ের উপরেই মাত্র নির্ভর করছে তাহলে অতীত বা ভবিষ্যৎ সময়ের অর্থনৈতিক অবস্থা বর্তমান সময়ের সিদ্ধান্তকে প্রভাবিত করতে পারছে না। কিন্তু বদলে যদি কল্পনা করা হয় যে ভোগব্যয়ের সিদ্ধান্ত, ধরা যাক, অতীতের আয়ের উপর নির্ভর করে তাহলে অতীতের অর্থনৈতিক অবস্থা বর্তমানের সিদ্ধান্তকে প্রভাবিত করছে। একটি সময়ের অবস্থার সঙ্গে অন্য সময়ের অবস্থা বা সিদ্ধান্তের এই সম্পর্কই চলিতাবস্থার ভিত্তি। এতে করে অর্থনীতির গতিপ্রকৃতি সময়ের উপর আবশ্যিকভাবে নির্ভরশীল হয়ে গেল। চলিতাবস্থার উপযুক্ত বিশ্লেষণের জন্য তাই প্রয়োজন অপেক্ষকগুলির অন্তর্ভুক্ত চলের মধ্যে সময়ান্তর কল্পনা করার। মনে করা যাক C_t হ'ল t-তম সময়ে ভোগ ব্যয়ের পরিমাণ আর Y_{t-1} হ'ল $t-1$-তম (অর্থাৎ একটি সময়ের একক পূর্বে) সময়ের আয়ের পরিমাণ। আমাদের কল্পিত অপেক্ষকটি যদি $C_t = f(Y_{t-1})$ হিসেবে নেওয়া হয় তাহলে তা চলিতা-বস্থার বিশ্লেষণের উপযুক্ত গাণিতিক সম্পর্ক। স্থিতাবস্থাব এবং চলিতা-বস্থার প্রতিকল্পের পার্থক্যও এখান থেকে স্পষ্টভাবে নির্দেশ করা চলে। স্থিতাবস্থার প্রতিকল্পে ব্যবহৃত চলগুলির মধ্যে কোনো সময়ান্তর থাকে না, আর চলিতাবস্থার প্রতিকল্পে ব্যবহৃত চলগুলির অন্তত কোনো দুটির মধ্যে সময়ান্তর থাকতেই হবে। এই সময়ান্তর কল্পনা করলে চলিতা-বস্থার প্রতিকল্পের সমীকরণগুলির চরিত্রও কিন্তু স্থিতাবস্থার প্রতিকল্পের সমীকরণের থেকে মূলত আলাদা হয়ে গেল। আমরা আগেই উল্লেখ

করেছি যে স্থিতাবস্থার সমীকরণগুলির চরিত্র বীজগণিতীয়। সময়ান্তর থাকার দরুন চলিতাবস্থার সমীকরণগুলি কিন্তু আর বীজগণিতীয় রইল না। চলিতাবস্থার সমীকরণগুলির সাধারণ চেহারা দাঁড়াল

$$f_j\,(x_1,\ t,\ x_2,\ t \pm 1,\ \ldots,\ x_n,\ t \pm s) = 0^1 \quad (6.1)$$

(6·1) সমীকরণটিকে বলা যেতে পারে আন্তর সমীকরণ।

আন্তর সমীকরণে সময়ের পরিমাপ সম্বন্ধে একটি বিশেষ ধারণা ব্যবহার করা হয়। এখানে কল্পনা করা হয় সময় যেন বিচ্ছিন্নভাবে প্রবহমান—তাকে এক একক, দুই একক এমনিভাবে যেন পরিমাপ করা যায়। এবং এই ধারণার বশবর্তী হয়ে বলা যায় যে আমাদের সমীকরণে ব্যবহৃত $x_n,\ t\pm s$-এর অর্থ হ'ল $t\pm s$-তম সময়ের এককে n-তম চলের মান। কিন্তু সময়ের প্রবহমানতা সম্পর্কে বিকল্প কল্পনা হ'ল 'নিরবচ্ছিন্ন'। সময় যেন নিরবচ্ছিন্নভাবে প্রবহমান। তাই যদি হয় তাহলে কোনো চলকেই সময়ের কোনো বিশেষ এককে, যথা t-তম এককে, আর পরিমাপ করা চলেনা। সে-ক্ষেত্রে আমাদের কল্পনা করতে হয় যে সময়ের নিরবচ্ছিন্ন প্রবাহের সঙ্গে চলগুলি নিরন্তর পরিবর্তনশীল। এবং এই পরিবর্তনশীলতার পরিমাপ হিসেবে সময়ের পরিবর্তনজনিত চলগুলির ডেরিভেটিভ্ হিসাব করতে হয়। এবং এই ক্ষেত্রে আমাদের আলোচ্য চলগুলির প্রকৃত বর্ণনা x_{it} হিসেবে নয় $x_i(t)$ এই হিসেবে দিতে হয়। $x_i(t)$ এইভাবে লেখার অর্থ হ'ল x_i চলটি t (অর্থাৎ সময়)-এর সঙ্গে নিরবচ্ছিন্নভাবে পরিবর্তমান। সময়ের এই নিরবচ্ছিন্ন কল্পনার বেলাতে চলিতাবস্থার সমীকরণগুলির সাধারণ চেহারা দাঁড়াবে

$$f_j\Big(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)\,;\ x_1^{(1)}(t),\ \ldots,\ x_n^{(1)}(t)\,;\ \ldots,$$
$$x_1^{(r)}(t),\ \ldots,\ x_n^{(r)}(t)\Big) = 0 \qquad \ldots (6.2)$$

এই সমীকরণে $x_i^{(r)}\ (t)$-এর অর্থ হ'ল i-তম চলের r-তম ডেরিভেটিভ্। (6·2) সমীকরণটিকে বলা হয় কলনীয় সমীকরণ। চলিতাবস্থার প্রতি-কল্পে সংশ্লিষ্ট গাণিতিক সম্পর্কগুলি (অর্থাৎ f_j-অপেক্ষকগুলি) আন্তর সমীকরণ বা কলনীয় সমীকরণ, বা প্রয়োজনমত, আন্তর-কলনীয় মিশ্র সমীকরণও হতে পারে। কিন্তু স্থিতাবস্থার সমীকরণগুলির মত তারা শুধুমাত্র বীজগণিতীয় সমীকরণ কখনোই হবে না।

1 আরো বিশদভাবে লিখতে গেলে সমীকরণটির সাধারণ চেহারা দাঁড়াবেঃ

$$f_j\,(x_1,\ t,\ \ldots,\ x_n,\ t\ ;\ x_1,\ t \pm 1,\ \ldots,\ x_n,\ t \pm 1\ ;$$
$$\ldots x_1,\ t \pm s,\ \ldots,\ x_n,\ t \pm s) = 0$$

চলিতাবস্থার সমীকরণগুলি স্থিতাবস্থার সমীকরণ থেকে আলাদা ব'লে তাদের সমাধানের চরিত্রও মূলত আলাদা। স্থিতাবস্থার প্রতিকল্পের সমাধানে আমরা বিভিন্ন চলের নির্দিষ্ট সাম্যমান নির্ধারণ করতে পারি। চলিতাবস্থার প্রতিকল্পে এইরকম নির্দিষ্ট সাম্যমান নয়, চলগুলির সাম্য গতিপথ নির্ধারণ করতে পারা যায়। প্রতিকল্পের আন্তর-সমীকরণ বা কলনীয় সমীকরণগুলিকে একযোগে সমাধান করতে পারলে প্রত্যেকটি চলের জন্য একটি করে সময়নির্ভর অপেক্ষক পাওয়া যাবে। মনে করা যাক আমাদের প্রতিকল্পের এমনি একটা সমাধানের সাধারণ চেহারা হ'ল

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n) \ldots (6 \cdot 3)$$

x_i-অপেক্ষকগুলি নিশ্চয়ই এমন যে মূল সমীকরণগুলির মধ্যে x_i-এর পরিবর্তে $x_i(t)$ বসালে সমীকরণগুলি সবই যুগপৎ সিদ্ধ হবে। এই অর্থে x_i-অপেক্ষকগুলি প্রতিকল্পের সাম্য গতিপথ নির্দেশ করে। অর্থাৎ চলগুলি যতোক্ষণ ঐ গতিপথে আছে ততোক্ষণ প্রতিকল্পের কল্পিত ব্যক্তি বা গোষ্ঠীর যাবতীয় আচরণবিধি পরস্পর সঙ্গতিপূর্ণ থাকবে।

প্রতিকল্পের সমীকরণগুলি যদি কলনীয় সমীকরণ হয় তাহলে x_i অপেক্ষককে জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করলে তা সময়ের সঙ্গে এক নিরবচ্ছিন্ন রেখাচিত্র হিসেবে পাওয়া যাবে। কিন্তু প্রতিকল্পের সমীকরণগুলি যদি আন্তর-সমীকরণ হয় তাহলে তাদের সমাধানের জ্যামিতিক চিত্র সময়ের সঙ্গে কিছু বিচ্ছিন্ন বিন্দু হিসেবে পাওয়া যাবে। এই বিন্দুগুলিকে মনে মনে রেখার সাহায্যে যোগ ক'রে নিলে চলের সাম্য গতিপথ সম্বন্ধে ধারণা পাওয়া যাবে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ

ভোক্তার আচরণ ঃ মার্শালীয় তত্ত্ব

1. আংশিক সাম্যাবস্থা

উনিশ শতকের দ্বিতীয়ার্ধে অর্থনৈতিক তত্ত্বচিন্তার দুটি মূল ধারা লক্ষ্য করা যায়। তার একটি ফরাসী অর্থনীতিবিদ লিওন ওয়ালরাস্ (1834—1910)-এর নামের সংগে জড়িত। ওয়ালরাসের পদ্ধতি সাধারণ সাম্যাবস্থা নামে পরিচিত। অপরটি হ'ল ইংরেজ অর্থনীতিবিদ আলফ্রেড্ মার্শাল (1842—1924) প্রবর্তিত আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতি। বর্তমান পরিচ্ছেদে আমরা এই আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির সাধারণ পরিচয় দেব এবং ভোক্তার আচরণ বিশ্লেষণে এই পদ্ধতির প্রয়োগ বিশদভাবে আলোচনা করব।

অর্থনৈতিক বাস্তবের দিকে সাধারণভাবে তাকালে চোখে পড়বে যে বাস্তবের বিভিন্ন অংশ পরস্পরের সংগে বিভিন্ন রকম সম্পর্কে আবদ্ধ। বাস্তবের বিভিন্ন অংশের মধ্যে যে অন্যোন্যনির্ভরতার সম্পর্ক বর্তমান তার সবগুলি সম্পর্ক একই সংগে আলোচনা করতে গেলে বিশ্লেষণ এমন জটিল আকার ধারণ করতে পারে যে তা অনেক ক্ষেত্রে অসুবিধাজনক। মনে করা যাক কোনো একটি নির্বাচিত অর্থনৈতিক বাস্তবের অন্তর্ভুক্ত চলগুলি হ'ল $x_1, \ldots, x_n$। এক্ষেত্রে বাস্তবের পূর্ণ পরিচয় পেতে গেলে প্রত্যেকটি চলের স্থিতিসাম্যমান এবং তাদের অন্যান্য আচরণ সবই জানা প্রয়োজন। n-সংখ্যক চলের প্রত্যেকের অন্তত স্থিতিসাম্য নির্ণয় করতে গেলেও চলগুলির মধ্যেকার n-সংখ্যক স্বাধীন সম্পর্কের কল্পনা করা প্রয়োজন। এই n-সংখ্যক স্বাধীন সম্পর্ক পাওয়া অনেক সময়ে শক্ত হ'তে পারে; পেলেও তাদের সমাধান সব সময়ে সহজ না হ'তে পারে। এমন কি হয়তো আদৌ সম্ভব না হতে পারে। চলগুলির প্রত্যেকের আচরণ যুগপৎ বিশ্লেষণের এই যে অসুবিধা মার্শালের আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতি তা এড়াবার অন্যতম কৌশল।

আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির মূল কথা হ'ল নির্বাচিত বাস্তবের সমস্ত চলগুলিকে একসংগে আলোচনার অন্তর্ভুক্ত না করা। বদলে ঐ নির্বাচিত বাস্তবের চলগুলির মধ্যে মাত্র দুটিকে বেছে নিয়ে তাদের মধ্যে একটির উপর আর একটির নির্ভরতার স্বরূপ নির্ণয় করা হয়। এবং এই নির্ণয়ের প্রসংগে নির্বাচিত বাস্তবের অন্যান্য চলগুলি আলোচ্য চল দুটির উপর

যে-প্রভাব বিস্তার করতে পারে তাকে অনুপস্থিত বলে কল্পনা করা হয়। মনে করা যাক $x_1, \ldots, x_n$ এই n-সংখ্যক চলের মধ্যে আমরা প্রথমে x_1 এবং x_2 এই চল দুটি বেছে নিলাম। এবং x_1 x_2-এর উপর কিভাবে নির্ভর করে প্রথম ধাপে তাই আমাদের আলোচ্য। এই নির্ণয়ের জন্য আমরা ধরে নিচ্ছি যে $x_3, \ldots, x_n$ এই চলগুলির x_1 বা x_2-এর উপর যদি কোন প্রভাব থেকেও থাকে তবে তা আপাতত অনুপস্থিত। এই অনুপস্থিতির কল্পনা করার জন্য মনে করা হয় যে প্রথম ধাপের আলোচ্য সময়কালে $x_3, \ldots, x_n$-এর মান সবই অপরিবর্তিত থাকছে। এই অপরিবর্তনীয়তার অঙ্গীকারই হ'ল আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির মূল কথা।

যে-কোনো একজন ভোক্তার আচরণের প্রসঙ্গে এই পদ্ধতির প্রয়োগ খুব সুন্দরভাবে লক্ষ্য করা চলে। একজন ভোক্তা সম্বন্ধে কল্পনা করা হচ্ছে যে তার আর্থিক আয় নির্দিষ্ট ক'রে দেওয়া আছে। অর্থনীতির বিভিন্ন বাজারের দ্রব্যমূল্য নির্দিষ্ট আছে। একজন ভোক্তা নিজের ইচ্ছা-মতো সেই মূল্যাবলি পরিবর্তন করতে পারে না। ভোক্তার পক্ষে গ্রহণ-যোগ্য একমাত্র সিদ্ধান্ত সে নির্দিষ্ট আয়কে বিভিন্ন দ্রব্যের উপর কিভাবে বণ্টন করবে। অর্থাৎ নির্দিষ্ট মূল্যে কোন দ্রব্যের কতো পরিমাণ সে কিনবে। ভোক্তার এই সিদ্ধান্তকে ব্যাখ্যা করাই হ'ল ভোক্তার আচরণ বিষয়ক তত্ত্বের মূল দায়িত্ব। ব্যাখ্যা অবশ্যই এমন হওয়া প্রয়োজন যা বাস্তব পর্য-বেক্ষণের সঙ্গে মেলানো যেতে পারে।

ভোক্তার সমস্যাটিকে যেভাবে উপস্থাপনা করা হ'ল তাতে এমন মনে করা মোটেই অসঙ্গত হবে না যে x_1 দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণ নির্ধারণের বেলায় ভোক্তার সিদ্ধান্ত তার মোট আয়, x_1-এর মূল্য, x_1 ব্যতীত অন্যান্য দ্রব্যাদির মূল্য, তার নিজের রুচি-পছন্দ, তার সামাজিক রীতিনীতি, ধর্মবিশ্বাস, গোষ্ঠীভুক্তি ইত্যাদি অনেক কিছুর উপর নির্ভরশীল। x_1-এর চাহিদার উপরে এতোগুলি প্রভাব যদি আমরা একসঙ্গে আলোচনা করতে চাই তাহলে আলোচনা অবশ্যই জটিল হবে এবং অনেক ক্ষেত্রেই নির্দিষ্ট সিদ্ধান্তে পৌঁছনো শক্ত হবে। আংশিক সাম্যাবস্থায় তাই সাধারণত x_1-এর চাহিদা এবং x_1-এর মূল্য ছাড়া অন্যান্য সব চল আপাতত অপরিবর্তিত থাকছে এই অঙ্গীকার মেনে নেওয়া হয়।

এখানে উল্লেখ করা দরকার যে আংশিক সাম্যাবস্থায় এই অপরিবর্ত-নীয়তার অঙ্গীকারের অর্থ কখনোই এই নয় যে আলোচ্য চলের উপর অপরিবর্তিত চলগুলির সম্ভাব্য প্রভাবকে অস্বীকার করা হচ্ছে। মার্শালের নিজের কথায় আপাতত অবাঞ্ছিত চলগুলিকে অপরিবর্তনীয়তার অঙ্গী-কারের সাহায্যে নিষ্ক্রিয় ক'রে রাখার এই পদ্ধতি এ নেহাতই প্রয়োজনের

খাতিরে ব্যবহৃত একটি বৈজ্ঞানিক কৌশল মাত্র। এবং আংশিক সাম্যাবস্থার পদ্ধতিতে বাস্তব সম্পর্কে সম্যক জ্ঞানলাভ করতে গেলে বিশ্লেষণ প্রথম ধাপেই শেষ করলে চলবে না। মার্শালের নিজের বক্তব্য অনুসারেই প্রথম ধাপের বিশ্লেষণ শেষ হবার পর দ্বিতীয় ধাপে এ পর্যন্ত অপরিবর্তিত কিছু চলকে তাদের সাময়িক 'সুপ্তি' থেকে উদ্ধার ক'রে সক্রিয় ক'রে তুলতে হবে। এবং এই স্তরে আলোচ্য চলগুলির উপর তাদের প্রভাব বিবেচনা করতে হবে। এমনি ক'রে ধাপে ধাপে আমরা বাস্তবের প্রকৃত স্বরূপে পৌঁছবার চেষ্টা করতে পারি।

আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির অন্তর্নিহিত একটি বড় দুর্বলতা গোড়াতেই লক্ষ্য করা যেতে পারে। মনে করা যাক ভোক্তার আচরণ বিশ্লেষণে আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির প্রয়োগ ক'রে আমরা দুটি চল বেছে নিয়েছি। তার একটি হ'ল কোনো একটি দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণ এবং অন্যটি হ'ল সেই দ্রব্যের মূল্য। নির্দিষ্ট দ্রব্যমূল্যে ভোক্তা দ্রব্যটির কতো পরিমাণ কিনতে চাইবে তা নির্ধারণ করাই হ'ল ভোক্তার স্থিতাবস্থা বিশ্লেষণের উদ্দেশ্য। আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির প্রয়োগ করা হচ্ছে ব'লে আলোচ্য দ্রব্যটির বাজার ব্যতীত অন্যান্য দ্রব্যের বাজার আপাতত অপরিবর্তিত থাকছে। ফলে অন্যান্য দ্রব্যের চাহিদার (বা ভোগের) হ্রাসবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে আলোচ্য দ্রব্যের চাহিদার যে-হ্রাসবৃদ্ধি হতে পারত তা আলোচনার অন্তর্ভুক্ত হতে পারছে না। এতে ক'রে বস্তুত কোনো ক্ষতি হ'ত না যদি আমাদের আলোচ্য দ্রব্যের সঙ্গে অন্যান্য দ্রব্যের প্রত্যেকটি অসম্পর্কিত হ'ত। কিন্তু বাস্তবের সবক্ষেত্রে যে দ্রব্যাদি পরস্পর অসম্পর্কিত হবেই এমন কোনো কথা নেই। অন্তত পরস্পর সম্পর্কিত দ্রব্যাদির আলোচনা আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির সাহায্যে সুষ্ঠুভাবে করা যায় না।

ভোক্তার আচরণ বিশ্লেষণে দ্রব্যাদির পারস্পরিক সম্পর্কের কথা বিশেষভাবে গুরুত্বপূর্ণ এই কারণে যে, কোনো কোনো ক্ষেত্রে দুটি দ্রব্যের মধ্যে পরিপূরকতা বা পরিবর্তনীয়তার সম্পর্ক থাকতে পারে। পরিপূরকতা বা পরিবর্তনীয়তা ধারণা দুটির বিশদ ব্যাখ্যা দেবার অবকাশ এখানে নেই। আপাতত এটুকু বললেই যথেষ্ট হবে যে একটি দ্রব্যের চাহিদার উপর অপর দ্রব্যের চাহিদা (বা তার প্রান্তিক উপযোগ) যদি নির্ভর করে তাহলে আমরা দ্রব্য দুটিকে পরস্পর সম্পর্কিত ব'লে মনে করতে পারি। সম্পর্কিত দ্রব্যের মধ্যেকার সম্পর্ককে নির্দিষ্ট করার জন্য পরিপূরকতা ও পরিবর্তনীয়তার ধারণার ব্যবহার করা হয়। ধারণা দুটির বিভিন্ন রকমের সম্ভাব্য সংজ্ঞা নিয়ে পরে বিস্তৃত আলোচনা করা হবে। সাধারণভাবে মনে করা যেতে পারে যে, কোনো নির্দিষ্ট সময়ে কোনো নির্দিষ্ট ভোক্তার জন্য বিভিন্ন

দ্রব্যাদির মধ্যে কিছু পরস্পর অসম্পর্কিত, কিছু পরস্পর পরিপূরক আর কিছু পরস্পর পরিবর্তনীয়। এই সাধারণ ক্ষেত্রের আলোচনা কিন্তু আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির প্রয়োগে সন্তোষজনক ভাবে করা চলে না। অসম্পর্কিত দ্রব্যাদির বিশেষ ক্ষেত্রেই মাত্র আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতি উপযুক্ত।

2. ভোক্তার স্থিতিসাম্য নির্ণয়

প্রথমেই বলে নেওয়া ভাল যে ভোক্তার স্থিতিসাম্য নির্ণয়ের জন্য মার্শাল নিজে যে কোন কোন অঙ্গীকার ব্যবহার করেছিলেন তা তাঁর রচনা থেকে পরিষ্কার বুঝতে পারা শক্ত। সবগুলি প্রয়োজনীয় অঙ্গীকারের পূর্ণ বিবৃতি মার্শালের রচনার কোনো এক জায়গায় নির্দিষ্টভাবে পাওয়া যায় না। কাজেই এক্ষেত্রে আমাদের অবলম্বন তাঁর *Principles of Economics*-এর বিভিন্ন প্রাসঙ্গিক অংশ এবং ঐ বই-এর গাণিতিক সংযোজন। মূল রচনায় নির্দিষ্ট সূত্রায়ন অনুপস্থিত ব'লেই মার্শালীয় চাহিদা তত্ত্ব নিয়ে নানা বিতর্কের সৃষ্টি হয়েছে। আমরা প্রথমে মার্শালের চিন্তার সঙ্গে সঙ্গতি-পূর্ণ প্রয়োজনীয় কতোগুলি অঙ্গীকারের সাহায্যে ভোক্তার স্থিতিসাম্য নির্ণয় করব; এবং এই স্থিতিসাম্যের ভিত্তিতে ভোক্তার তুলনামূলক স্থিতাবস্থার আলোচনা করব। তুলনামূলক স্থিতাবস্থার আলোচনা থেকে মার্শালের চাহিদারেখা নির্ণয় করা হবে। পরে এই চাহিদারেখার বিশদ বিশ্লেষণের প্রসঙ্গে মার্শালীয় অঙ্গীকারগুলি নিয়ে যে-বিতর্কের সৃষ্টি হয়েছে তার সংক্ষিপ্ত পরিচয় দেবার চেষ্টা করব।

আগেই উল্লেখ করা হয়েছে যে মার্শালীয় তত্ত্ব কাঠামোর মূল পদ্ধতি হ'ল আংশিক সাম্যাবস্থা। এই পদ্ধতির অন্যতম ফলশ্রুতি আলোচ্য দ্রব্যাদির সম্পর্কহীনতা। আমাদের নির্বাচিত ভোক্তা যতোগুলি দ্রব্যের উপর তার মোট আয় বণ্টন করবে সেই দ্রব্যগুলি পরস্পর অসম্পর্কিত। এই অসম্পর্কিত দ্রব্যের মধ্যে যে কোনো একটিকে আমরা বর্তমান আলোচনার জন্য বেছে নিলাম। মনে করা যাক এই দ্রব্যের বিভিন্ন পরিমাণ সূচক চল হ'ল x। দ্রব্যগুলি অসম্পর্কিত বলে ভোক্তা x-এর যে কোনো নির্দিষ্ট মান থেকে যে-পরিমাণ উপযোগ উপভোগ করবে তার পরিমাণও x-এর মান ব্যতীত অন্যান্য চলের (অর্থাৎ অন্যান্য দ্রব্যের) উপভোগ্য পরিমাণের উপর নির্ভর করবে না। ফলে আলোচ্য দ্রব্যের থেকে ভোক্তার উপযোগের বর্ণনা $U=U(x)$ এই উপযোগ অপেক্ষকের সাহায্যে দেওয়া যেতে পারে। ভোক্তা যখন x পরিমাণ দ্রব্য উপভোগ করছে তখন তার মোট উপযোগ U।

U অপেক্ষক সম্বন্ধে আমরা ধরে নিচ্ছি যে এর প্রথম এবং দ্বিতীয়

ডেরিভেটিভের অস্তিত্ব আছে এবং দুটি ডেরিভেটিভ্ই নিরবচ্ছিন্ন। উপরন্তু, U অপেক্ষকের প্রথম ডেরিভেটিভ্

$$U'(x) > 0 \ldots (2 \cdot 1)$$

এবং এর দ্বিতীয় ডেরিভেটিভ $U''(x) < 0 \ \ldots\ldots \ (2 \cdot 2)$

$(2 \cdot 1)$ অঙ্গীকারের তাৎপর্য এই যে আমাদের আলোচ্য দ্রব্যের প্রান্তিক উপযোগ সব সময়েই ধনাত্মক। অর্থাৎ, দ্রব্যটির ভোগ বাড়লে ভোক্তার উপযোগ বাড়ছে। আমাদের আলোচনার সীমারেখার মধ্যে ভোক্তা দ্রব্যটির উপভোগে সম্পৃক্ত এমন কল্পনা করা হচ্ছে না। দ্রব্যটি ভোক্তার কাছে সব সময়েই কাম্য থাকছে। $(2 \cdot 2)$ অঙ্গীকারের তাৎপর্য এই যে দ্রব্যের ভোগ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে ভোক্তার কাছে তার প্রান্তিক উপযোগ কমছে। এই অঙ্গীকারটিকেই বলা হয় মার্শালের ক্রমহ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগের সূত্র। এই সূত্র অনুসারে দ্রব্যের ভোগ বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে ভোক্তার কাছে মোট উপযোগ বাড়ে কিন্তু বৃদ্ধির হার ক্রমশ ক'মে যায়।

$(2 \cdot 2)$ অঙ্গীকারটিকে একটু ভাল ক'রে লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে এই অঙ্গীকারের পিছনে উপযোগের পরিমাণ সম্পর্কে একটা নির্দিষ্ট ধারণা নিহিত রয়েছে। ক্রমহ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগ সূত্রের বর্ণনার জন্য প্রান্তিক উপযোগের তুলনামূলক বিচার প্রয়োজন। ভোক্তার ভোগের পরিমাণ যদি x° হয় তাহলে তার প্রান্তিক উপযোগ $U'(x^{\circ})$। ভোগ যদি বেড়ে x^{1} হয় তাহলে তার প্রান্তিক উপযোগ $U'(x^{1})$। ক্রমহ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগ সূত্র অনুসারে $x^{1} > x^{\circ} \rightarrow U'(x^{1}) < U'(x^{\circ})$। অর্থাৎ U-অপেক্ষকটি এমন এক অর্থে পরিমাপযোগ্য হওয়া প্রয়োজন যে শুধুমাত্র $U(x^{1})$ এবং $U(x^{\circ})$-র মধ্যে ছোটবড় তুলনা করতে পারলেই চলবে না; $U'(x^{1})$ এবং $U'(x^{\circ})$-র মধ্যেও ছোটবড় তুলনা করতে পারা প্রয়োজন। যে-পরিমাপের ক্ষেত্রে শুধু সংশ্লিষ্ট অপেক্ষকটিকে নয়, তার প্রথম ডেরিভেটিভ্কেও ছোটবড় তুলনা করা চলে সেই পরিমাপকে বলা হয় অঙ্কবাচক পরিমাপ। মার্শালীয় তত্ত্বে উপযোগকে অঙ্কবাচক অর্থে পরিমাপযোগ্য ব'লে কল্পনা করা হয়। উপযোগের পরিমাপযোগ্যতা সম্বন্ধে আমরা পরবর্তী পরিচ্ছেদে আরো বিশদভাবে আলোচনা করব।

ভোক্তার স্থিতিসাম্য নির্ণয়ে মার্শালীয় তত্ত্বকাঠামোর আর একটি অঙ্গীকার উল্লেখযোগ্য। এই অঙ্গীকারে মনে করা হয় যে ভোক্তার কাছে আয়ের (বা অর্থের) প্রান্তিক উপযোগ অপরিবর্তিত। এই অঙ্গীকারের প্রসঙ্গে স্পষ্টতই কল্পনা করা হচ্ছে যে, ভোক্তার আচরণ আলোচনা করা হচ্ছে যে-সময়সীমার মধ্যে তা খুব দীর্ঘমেয়াদী নয়। কারণ দীর্ঘমেয়াদী সময়সীমার মধ্যে ভোক্তার নানারকমের পরিবর্তন দেখা দিতে পারে যার

অনেক কিছুই আমরা আপাতত অপরিবর্তিত ধ'রে নিচ্ছি। যেমন, ভোক্তার রুচি-পছন্দের এমন পরিবর্তন আসতে পারে যে তার উপযোগ অপেক্ষকের পরিবর্তন দেখা দিতে পারে। আমরা অবশ্যই কল্পনা করে নিচ্ছি যে ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষক নির্দিষ্টভাবে দিয়ে দেওয়া আছে। অর্থাৎ, আলোচ্য সময়সীমার মধ্যে তার রুচি-পছন্দ অপরিবর্তিত। ঠিক তেমনি মনে করা হচ্ছে যে আলোচ্য সময়সীমার মধ্যে ভোক্তার কাছে তার আয়ের প্রান্তিক উপযোগ বদলাচ্ছে না।

এ কথা মনে রাখা দরকার যে এই অঙ্গীকারের অর্থ কখনোই এ নয় যে ভোক্তার আয়ের হ্রাসবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে তার প্রান্তিক উপযোগের কোন পরিবর্তন হয় না। মার্শাল স্পষ্ট উল্লেখ করেছেন যে সাধারণভাবে অন্যান্য দ্রব্যাদিব বেলায় যেমন দ্রব্যের ভোগ বাড়তে থাকলে প্রান্তিক উপযোগ কমতে থাকে, তেমনি অর্থের (বা আয়ের) বেলাতেও সেই আয় বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে প্রান্তিক উপযোগ কমতে থাকে।[1] আয়-নির্ভর উপযোগ অপেক্ষকের দ্বিতীয় ডেরিভেটিভ্ অন্যান্য দ্রব্যের উপযোগ অপেক্ষকের মতোই ঋণাত্মক। তবে বর্তমান প্রসঙ্গে যে আয়ের প্রান্তিক উপযোগ অপরিবর্তিত ব'লে কল্পনা করা হচ্ছে তার মূল কারণ আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতি। আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতিতে একসঙ্গে বিভিন্ন বাজারের (অর্থাৎ বিভিন্ন দ্রব্যের মূল্য এবং চাহিদার) পরিবর্তন আলোচনা করা হয় না। বস্তুত এই অন্যোন্যনির্ভরতার সম্পর্কগুলিকে আলোচনার অন্তর্ভুক্ত না করার জন্যই আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির ব্যবহার।

আংশিক সাম্যাবস্থার তত্ত্বকাঠামোর মধ্যে আয়ের অপরিবর্তনীয় প্রান্তিক উপযোগ সূত্র ব্যবহার করা যে মোটামুটিভাবে সমর্থনযোগ্য তা এই কারণে যে এখানে কোনো একটি দ্রব্যের উপর ভোক্তার মোট আয়ের একটি ক্ষুদ্র অংশই মাত্র ব্যয় করা হচ্ছে। কাজেই আলোচ্য দ্রব্যের মূল্যের পরিবর্তন যদি খুব বেশি না হয় তাহলে দ্রব্যটির উপর মোট আয়ের যে-অংশ ব্যয় করা হচ্ছে তার পরিমাণও মোটামুটি অপরিবর্তিত থাকবে। ফলে দ্রব্যটির যে কোনো একক কেনবার সময়ে ভোক্তার হাতে যে পরিমাণ অর্থ (বা আয়) আছে, তার পরিমাণ সব সময়ে এক ব'লে কল্পনা করা যেতে পারে। এবং সেই কারণে ভোক্তার কাছে আয়ের প্রান্তিক উপযোগও অপরিবর্তিত থাকছে।

ভোক্তার স্থিতিসাম্য নির্ণয় করতে গেলে তার সাম্যাবস্থার সংজ্ঞা নির্দেশ করতে হবে। ভোক্তার সাম্যাবস্থা হ'ল বিভিন্ন দ্রব্যাদির এমন নির্দিষ্ট

---

1 মার্শালের *Principles* (অষ্টম সংস্করণ, 1959 মুদ্রণ)-এর গাণিতিক সংযোজন, নোট II, পৃঃ 690 দ্রষ্টব্য।

পরিমাণ, ধরা যাক, $x^\circ_1, \ldots, x^\circ_n$ যাতে ক'রে ভোক্তার মোট উপযোগ অপেক্ষকের মান সর্বোচ্চ হয় এবং ঐ পরিমাণ দ্রব্যাদির মোট ব্যয় ভোক্তার মোট আয়ের সমান হয়। আয়-ব্যয়ের সমতার এই শর্তকে বলে বাজেট সমীকরণ। দ্রব্যাদির নির্দিষ্ট মূল্যাবলি যদি হয় $p_1, \ldots, p_n$ তাহলে যে কোনো দ্রব্যসমষ্টি $x_1, \ldots, x_n$ কেনবার মোট খরচ হবে $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n$। ভোক্তার নির্দিষ্ট আয় যদি M হয় তাহলে তার বাজেট সমীকরণ হবে $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = M \quad \ldots (2\cdot3)$

ভোক্তার নির্দিষ্ট উপযোগ অপেক্ষক মনে করা যাক

$$U = u(x_1, \ldots x_n) \quad \ldots \quad (2\cdot4)$$

এখানে $U =$ মোট উপযোগ। ভোক্তার সাম্যাবস্থা হল $x_1, \ldots, x_n$ চলগুলির সেই নির্দিষ্ট মান যাতে করে

$U = u(x_1, \ldots, x_n)$ -এর মান সর্বোচ্চ হয়
এবং $p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = M$ $\quad \ldots (2\cdot5)$

$(2\cdot5)$ -কে ভোক্তার সাম্যাবস্থার সাধারণ সংজ্ঞা হিসেবে নেওয়া যেতে পারে।

আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতি অনুসারে আমাদের আলোচ্য দ্রব্যের বাজার ছাড়া অন্যান্য বাজারের অবস্থা অপরিবর্তিত বলে মনে করা হচ্ছে। x_1 যদি আমাদের আলোচ্য দ্রব্য হয় তাহলে $x_2, \ldots, x_n$ এই চলগুলির মান নির্দিষ্ট ব'লে মনে করতে হবে।[1] এই নির্দিষ্ট মানগুলি মনে করা যাক $x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$। এক্ষেত্রে বাজেট সমীকরণের চেহারা দাঁড়াচ্ছে

$$p_1x_1 + p_2x_2^\circ + \ldots + p_nx_n^\circ = M \qquad \ldots (2\cdot3a)$$

আমাদের তত্ত্বকাঠামোর মধ্যে আলোচ্য দ্রব্যাদি যেহেতু পরস্পর অসম্পর্কিত তাই ভোক্তার মোট উপযোগ বিভিন্ন দ্রব্যের থেকে আলাদাভাবে পাওয়া উপযোগের যোগফল। $U_i = U_i(x_i)$ যদি i-তম দ্রব্যের মোট উপযোগ হয় তাহলে ভোক্তার মোট উপযোগ

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \qquad \ldots (2.6)$$

---

1 অন্যান্য দ্রব্যাদির পরিমাণ সম্পর্কে এই ব্যাখ্যা নিয়ে আপত্তি উঠতে পারে। কারণ, এই ব্যাখ্যায় চাহিদারেখার এমন কিছু ধর্ম পাওয়া যায় যা মার্শালের উদ্দিষ্ট ছিল না ব'লেই মনে করা হয়। এই প্রসঙ্গে বিকল্প ব্যাখ্যা হতে পারে যে অন্যান্য দ্রব্যের পরিমাণ অনির্দিষ্ট। তবে ব্যাখ্যা যাই হোক না কেন আংশিক সাম্যাবস্থায় আমরা একসঙ্গে মাত্র একটি দ্রব্যের সাম্যাবস্থাই নির্ণয় করব।

বর্তমান ক্ষেত্রের এই U-অপেক্ষককে বলা হয় যোগসম্ভব উপযোগ অপেক্ষক।[1] ভোক্তার স্থিতিসাম্যের সমস্যাটি তাহলে দাঁড়াল এইঃ

x_1-এর এমন একটি মান নির্ধারণ করতে হবে যাতে করে

$$\left.\begin{array}{l} U = U(x_1, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ) \\ \quad = U_1(x_1) + U_2(x_2^\circ) + \ldots + U_n(x_n^\circ)\text{-এর} \\ \text{মান সর্বোচ্চ হয় এবং } p_1 x_1 + p_2 x_2^\circ + \ldots + p_n x_n^\circ = M \end{array}\right\} \ldots (2\cdot 5a)$$

লাগ্রাঞ্জ পদ্ধতি অনুসারে এই শর্তাধীন সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের সমস্যাটিকে সমাধান করা যেতে পারে। আমাদের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হবে

$$L = U_1(x_1) + U_2(x_2^\circ) + \ldots + U_n(x_n^\circ) - \lambda \left[p_1 x_1 + p_2 x_2^\circ + \ldots + p_n x_n^\circ - M \right]।$$

x_1 এবং λ-এর পরিবর্তন জনিত L-এর আংশিক ডেরিভেটিভ্ হবে

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = U_1'(x_1) - \lambda p_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2^\circ + \ldots + p_n x_n^\circ - M।$$

I এর সর্বোচ্চ মানের শর্ত হ'লঃ

$$\frac{U_1'(x_1)}{p_1} = \lambda \;\ldots\ldots (2\cdot 7)$$

$$p_1 x_1 = M - \sum_{i=2}^{n} p_i x_i^\circ \;\ldots\;\ldots (2\cdot 8)$$

এখানে λ হ'ল একটি অনির্ণীত লাগ্রাঞ্জ গুণক। (2·7) এবং (2·8) এই সমীকরণ দুটিকে সহসমাধান করলে আমরা x_1 এবং λ-এর সাম্যমান নির্ধারণ করতে পারব। এখন প্রশ্ন হ'ল λ-র অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা কি হবে? উপরের L-অপেক্ষকের দিকে তাকালে দেখতে পাচ্ছি যে $U_1(x_1)$ থেকে $U_n(x_n^\circ)$ পর্যন্ত রাশিগুলির প্রত্যেকের চরিত্র হ'ল উপযোগের। অতএব

1 উপযোগ অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতার পূর্ণ গাণিতিক এবং অর্থনৈতিক তাৎপর্য মার্শাল নিজে যথেষ্ট বিস্তারিতভাবে আলোচনা করেন নি বটে, তবে তিনি এ সম্বন্ধে সচেতন ছিলেন। *Principles* (অষ্টম সংস্করণ, 1959 মুদ্রণ)-এর 109 পৃষ্ঠার পাদটীকা দ্রষ্টব্য। উপযোগ অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতা এবং সংশ্লিষ্ট পৃথকীকরণের আধুনিক আলোচনা ষষ্ঠ পরিচ্ছেদে পাওয়া যাবে।

তাদের যোগফলও উপযোগ। p_1x_1 থেকে M পর্যন্ত প্রত্যেকটি রাশির চরিত্র হ'ল অর্থ। তাদের যোগফলও তাই অর্থ। কাজেই λ-র চরিত্র অবশ্যই হবে অর্থের একক প্রতি উপযোগ। λ-কে অর্থের (বা আয়ের) প্রান্তিক উপযোগ হিসেবে ব্যাখ্যা করলে আমরা এই চরিত্র পাই এবং L-অপেক্ষকটির চরিত্র তখন দাঁড়ায় উপযোগের।

এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে (2·7) এবং (2·8) সমীকরণ দুটির সমাধান করতে পারলে আমরা x_1 এবং λ-এর যে সাম্যমান পাব তা দ্রব্যাদির নির্দিষ্ট মূল্য $p_1, \ldots, p_n$ এবং ভোক্তার আয় M-এর উপর নির্ভরশীল হবে। অর্থাৎ,

$$\bar{x}_1 = x_1(p_1, \ \ldots, p_n, M) \ldots\ldots (2\cdot9)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(p_1, \ \ldots, p_n, M) । \ \ldots (2\cdot10)$$

এখানে $\bar{x}_1$ এবং $\bar{\lambda}$ x_1 এবং λ-র সাম্যমানের নির্দেশক।

আংশিক পদ্ধতি অনুসারে যে-কোনো নির্বাচিত দ্রব্যের সাম্যাবস্থার শর্তটিকে তাহলে লেখা যায়

$$U_i'(x_i) = \ p_i\lambda । \ \ldots (2\cdot11)$$

এই সমীকরণের অর্থ হ'ল সাম্যাবস্থায় ভোক্তা দ্রব্যটির যে পরিমাণ ভোগ করতে চায় তার প্রান্তিক উপযোগ প্রাপ্তি এবং প্রান্তিক উপযোগ ত্যাগ সমান। যতোক্ষণ পর্যন্ত এই সমতা না আসছে ততোক্ষণ পর্যন্ত দ্রব্যের হ্রাসবৃদ্ধির ফলে ভোক্তার উপযোগ বৃদ্ধি পাবে। (2·11) সমীকরণটিকে একটু অন্যভাবেও দেখা চলে। বাজেট সমীকরণের শর্তাধীন মোট উপযোগের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় সমস্যার সমাধান হিসেবে আমরা এই ফল পেয়েছি। লক্ষণীয় যে (2·11) সমীকরণ পাবার জন্য আয়ের প্রান্তিক উপযোগ যে অপরিবর্তিত এই অঙ্গীকার ব্যবহার করার প্রয়োজন হয় নি। বস্তুত আয়ের প্রান্তিক উপযোগ ভোক্তার কাছে কতো সেটা ভোক্তার সাম্যাবস্থার মধ্য থেকে নির্ধারিত হয়েছে। আয়ের প্রান্তিক উপযোগ দ্রব্যমূল্য এবং মোট আর্থিক আয়ের উপর নির্ভরশীল। তাই আমরা ধ'রে নিচ্ছি যে ভোক্তার কাছে তার আয়ের প্রান্তিক উপযোগ দেওয়া আছে। এখন ভোক্তার সমস্যা হ'ল আলোচ্য দ্রব্যের নীট উপযোগের সর্বোচ্চ মানে পৌঁছনো। i-তম দ্রব্যের x_i পরিমাণ ভোগ করলে নীট উপযোগ (N) হবে

$$N = U_i(x_i) - \ \lambda p_i x_i । \ \ldots (2\cdot12)$$

এখানে $\lambda =$ আয়ের প্রান্তিক উপযোগ। λ-কে যদি এখন প্যারামিটার

হিসেবে কল্পনা করা যায় তাহলে x_i-এর পরিবর্তনের প্রসঙ্গে N-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের শর্ত হবে

$$\frac{dN}{dx_i} = U_i'(x_i) - \lambda p_i = 0$$

অথবা $U_i'(x_i) = \lambda p_i$ . . . . (2.13)

(2·13) ও (2·11) তুলনা ক'রে আমরা বলতে পারি যে আয়ের প্রান্তিক উপযোগ যদি অপরিবর্তিত থাকে তাহলে ভোক্তা কোনো একটি দ্রব্য থেকে সর্বোচ্চ নীট উপযোগ পেলে তার মোট উপযোগও সর্বোচ্চ হবে।

3. তুলনামূলক স্থিতাবস্থা ও চাহিদারেখার গুণাবলি

আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতি অনুসারে ভোক্তার স্থিতিসাম্যের পূর্ণ শর্ত হ'ল উপরের (2·7) এবং (2·8) সমীকরণ দুটি। শুধুমাত্র এই স্থিতি-সাম্যের শর্ত থেকে কিন্তু দ্রব্যের মূল্য বা ভোক্তার আয়ের পরিবর্তনের ফলে দ্রব্যের চাহিদার যে-পরিবর্তন হবে তা জানা যাচ্ছে না। বাজারের অবস্থা পর্যবেক্ষণ করলে আমরা যেহেতু আয় বা মূল্যের পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে চাহিদার পরিবর্তনের সম্পর্ক জানতে পারি তাই আমাদের স্থিতি-সাম্যের শর্ত থেকেও এইরকম সম্পর্ক নির্ধারণ করা প্রয়োজন। উপরের (2·9) এবং (2·10)-এ আমাদের আলোচ্য তত্ত্বের চলগুলিকে প্যারা-মিটারের উপর নির্ভরশীলভাবে দেখানো হয়েছে। (2·9)-ই হ'ল আমাদের আলোচ্য দ্রব্যের চাহিদা অপেক্ষক। এই চাহিদা অপেক্ষকের কোনো গুণাবলিই কিন্তু শুধুমাত্র স্থিতিসাম্যের শর্ত থেকে পাওয়া যায় নি। তুলনা-মূলক স্থিতাবস্থার ফলাফল কিছু নির্ণয় করতে পারলে তবে চাহিদা অপেক্ষকের গুণাবলি পাওয়া যাবে।

লক্ষণীয় যে আমরা উপরের আলোচনায় দু'রকম স্থিতিসাম্যের শর্ত পেয়েছি। এর মধ্যে (2·13) পাওয়া গেছে সর্বোচ্চ নীট উপযোগ প্রাপ্তির শর্ত থেকে। (2·13)-এর পিছনে আয়ের প্রান্তিক উপযোগ যে অপরিবর্তিত এই অঙ্গীকার রয়েছে। আর (2·7) — (2·8) শর্ত দুটি পাওয়া গেছে সর্বোচ্চ মোট উপযোগ প্রাপ্তির সমস্যার সমাধান হিসেবে। এই শর্ত দুটির পিছনে আয়ের প্রান্তিক উপযোগের অপরিবর্তনীয়তা সম্পর্কে কোনো অঙ্গীকার নেই। আমাদের দু'রকম স্থিতিসাম্যের শর্তের মধ্যে এইটিই মূল তফাত। এই তফাত থেকে তুলনামূলক সাম্যাবস্থার ফলাফলেও কিছু তফাত পাওয়া যাবে।

চাহিদা অপেক্ষকের সবচেয়ে উল্লেখযোগ্য ধর্ম হ'ল এর ঋণাত্মক স্লোপ।

দ্রব্যের মূল্য বাড়লে তার চাহিদা কমবে এবং মূল্য কমলে চাহিদা বাড়বে। চাহিদা অপেক্ষকের এই ধর্মকেই চাহিদা সূত্র বলা হয়। মার্শালীয় স্থিতি-সাম্যের শর্ত থেকে এই সূত্রটি সহজেই পাওয়া যায়।

$\bar{x}_i$ যদি x_i-এর সাম্যমান হয় তাহলে (2·13) থেকে পাচ্ছি যে

$$U_i'(\bar{x}_i) - \lambda p_i = 0 \text{।}$$

λ-কে প্যারামিটার হিসেবে নিয়ে p_i-এর পরিবর্তনজনিত সমগ্র অপেক্ষকটির পরিবর্তন দাঁড়ায়

$$U_i''(\bar{x}_i) \cdot \frac{d\bar{x}_i}{dp_i} - \lambda = 0$$

অথবা

$$\frac{d\bar{x}_i}{dp_i} = \frac{\lambda}{U_i''(x_i)} \quad \ldots\ldots\ldots(3 \cdot 1)$$

(3·1) চাহিদারেখার স্লোপের নির্দেশক। (2·2)-এর অঙ্গীকার অনুসারে $U_i''(\bar{x}_i) < 0$; (2·13) থেকে সহজেই দেখতে পাওয়া যায় যে λ নিশ্চয়ই একটি ধনাত্মক রাশি। কারণ, $\lambda = U_i'(x_i)/p_i$ এবং (2·1)-এর অঙ্গীকার অনুসারে $U_i'(x_i) > 0$। অতএব (3·1)-এর $\frac{d\bar{x}_i}{dp_i} < 0$। চাহিদা অপেক্ষকের জ্যামিতিক রেখাচিত্র তাই নিম্নাভিমুখী।

(2·7) ও (2·8)-এর সাধারণ সমীকরণ দুটির ভিত্তিতে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ ক'রেও আমরা চাহিদা রেখার ঋণাত্মক স্লোপ নির্ধারণ করতে পারি। এই বিশ্লেষণ থেকে চাহিদা অপেক্ষকের আরো দু'একটি ধর্ম পাওয়া যেতে পারে। (2·7) ও (2·8) সমীকরণ দুটি x_1 এবং λ-র সাম্যমান $\bar{x}_1$ এবং $\bar{\lambda}$-এর জন্য অভেদে রূপান্তরিত হবে। সেখান থেকে আমরা আংশিক ডেরিভেটিভের সাহায্যে $\frac{d\bar{x}_1}{dp_1}$, $\frac{d\bar{x}_1}{dM}$, $\frac{d\bar{\lambda}}{dp_1}$ এবং $\frac{d\bar{\lambda}}{dM}$ এই চারটি রাশি নির্ণয় করতে পারি। প্রথমে, p_1-এর পরিবর্তনজনিত সমীকরণ দুটির পরিবর্তন হবে

$$U_1''(\bar{x}_1) \cdot \frac{d\bar{x}_1}{dp_1} - p_1 \frac{d\bar{\lambda}}{dp_1} = \bar{\lambda}$$

$$p_1 \cdot \frac{d\bar{x}_1}{dp_1} \qquad = -\bar{x}_1$$

এখান থেকে

$$\frac{d\bar{x}_1}{dp_1} = -p_1\bar{x}_1/p_1^2 = \quad \bar{x}_1/p_1 \quad \ldots\ldots(3\cdot2)$$

এবং

$$\frac{d\lambda}{dp_1} = -\{\bar{x}_1U_1''(\bar{x}_1) + \lambda p_1\}/p_1^2 \quad \ldots.(3\cdot3)$$

এবার M-এর পরিবর্তনজনিত সমীকরণ দুটির পরিবর্তন হবে

$$U_1''(\bar{x}_1)\cdot\frac{d\bar{x}_1}{dM} - p_1\frac{d\bar{\lambda}}{dM} = 0$$

$$p_1\cdot\frac{d\bar{x}_1}{dM} = 1$$

এখান থেকে

$$\frac{d\bar{x}_1}{dM} = 1/p_1 \quad \ldots\ldots(3\cdot4)$$

এবং

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dM} = U_1''(\bar{x}_1)/p_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (3\cdot5)$$

(3·2) থেকে স্পষ্ট দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে x_1 এবং p_1 যেহেতু দুইই ধনাত্মক তাই $\frac{d\bar{x}_1}{dp_1} < 0$ । $\frac{d\bar{x}_1}{dp_1}$-কে বলা যেতে পারে **মূল্য প্রভাব**। এটাই চাহিদা রেখার নিম্নাভিমুখীনতার ধর্ম। (3·2) এবং (3·4)-কে একসঙ্গে নিলে দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে

$$\frac{d\bar{x}_1}{dp_1} = -\bar{x}_1\frac{d\bar{x}_1}{dM}, \quad \ldots\ldots(3\cdot6)$$

অর্থাৎ, p_1-এর পরিবর্তনজনিত x_1-এর সাম্যমানের যে-পরিবর্তন তা $\frac{d\bar{x}_1}{dM}$-এর উপর নির্ভরশীল। $\frac{d\bar{x}_1}{dM}$-কে বলা যেতে পারে **আয় প্রভাব**।

(3·6)-এর তাৎপর্য তাহলে দাঁড়াচ্ছে এই যে আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতিতে দ্রব্যের মূল্য প্রভাব সম্পূর্ণভাবে আয় প্রভাবের উপর নির্ভরশীল। (3·4) থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে আয় প্রভাব অবশ্যই ধনাত্মক। অর্থাৎ, আংশিক সাম্যাবস্থায় নির্বাচিত দ্রব্যটি এমন যে আয় বৃদ্ধি হ'লে ঐ দ্রব্যের চাহিদা বৃদ্ধি হবেই। আর এই কারণেই মূল্য প্রভাব ঋণাত্মক। কারণ, দ্রব্যের মূল্য যদি কমে তাহলে ভোক্তার প্রকৃত আয় বাড়ে। কম মূল্যে পূর্বের পরিমাণ যদি সে কেনে তাহলে আর্থিক আয়ের একটা অংশ উদ্বৃত্ত থাকে। অন্যান্য দ্রব্যের পরিমাণ যেহেতু পূর্বনির্দিষ্ট তাই উদ্বৃত্ত আয় আলোচ্য দ্রব্যের উপরেই খরচ করতে হবে, নইলে বাজেট সমীকরণ পুরোপুরি সিদ্ধ হবে না। ফলে মূল্য কমলে উদ্বৃত্ত আয়ের জন্য যে চাহিদা বৃদ্ধি হবে তারই ফল হিসেবে মূল্য প্রভাব নির্ধারিত হচ্ছে। এবং বর্তমান ক্ষেত্রে এই মূল্য প্রভাব নিশ্চয়ই ঋণাত্মক। এটাই মার্শালীয় তত্ত্বকাঠামোর অন্তর্গত চাহিদা সূত্র।

(3·5) থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে $\frac{d\bar{\lambda}}{dM} < 0$, যেহেতু $U_1''(x_1) < 0$। এর অর্থ খুব স্পষ্ট। ভোক্তার আর্থিক আয় বাড়লে তার আয়ের প্রান্তিক উপযোগ কমবে। এই ফলও সাধারণগ্রাহ্য। (3·3)-এর ফলটি একটু বিশেষভাবে বিবেচ্য। এমনিতে দেখা যাচ্ছে যে শুধুমাত্র ক্রমহ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগের সূত্র থেকে $\frac{d\bar{\lambda}}{dp_1}$ সম্বন্ধে কোনো নিশ্চিত সিদ্ধান্তে পৌঁছনো যাচ্ছে না। কারণ, $\frac{d\bar{\lambda}}{dp_1} \gtreqless 0$ নির্ভর করছে $\bar{x}_1 U_1''(\bar{x}_1)$ এবং λp_1-এর পারস্পরিক মানের উপর। অর্থাৎ, দ্রব্যমূল্যের সঙ্গে আয়ের প্রান্তিক উপযোগের নির্ভরতা কেমন তার সাধারণ কোনো সূত্র পাওয়া যাচ্ছে না। তবে যদি আমরা মনে করি যে $\frac{d\bar{\lambda}}{dp_1} = 0$, অর্থাৎ, আয়ের প্রান্তিক উপযোগ দ্রব্যমূল্য নির্ভর নয়, তাহলে

$$\lambda p_1 = -\bar{x}_1 U_1''(\bar{x}_1)$$

অথবা

$$\lambda = -\bar{x}_1 U_1''(\bar{x}_1)/p_1$$

$$= \frac{d\bar{x}_1}{dp_1} \cdot U_1''(\bar{x}_1)$$

অথবা

$$\frac{d\bar{x}_1}{dp_1} = \lambda \;/\; U_1''(\bar{x}_1) < 0 \qquad \ldots \quad (3 \cdot 7)$$

(3·7) -এর তাৎপর্য এই যে এই মূল্য প্রভাব (3·1) -এ পাওয়া মূল্য প্রভাবের সঙ্গে মেলে। এখানে লক্ষণীয় যে (3·7) এবং (3·1) দুয়ের পিছনেই আয়ের প্রান্তিক উপযোগের অপরিবর্তনীয়তার ধারণাটি ব্যবহার করা হয়েছে। এবং স্পষ্ট দেখা যাচ্ছে যে এই অপরিবর্তনীয়তার ধারণা ব্যবহার করলে মূল্য প্রভাবের ঋণাত্মক চিহ্ন, অথবা, যা একই কথা, চাহিদা রেখার ঋণাত্মক স্লোপ ক্রমহ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগের সূত্রের উপর নির্ভরশীল ব'লে দেখতে পাওয়া যায়। (3·2) থেকে চাহিদা রেখার ঋণাত্মক স্লোপ পাওয়া যায় বটে, তবে ক্রমহ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগের সূত্রের উপর তার নির্ভরতা ঐ ফলের মধ্যে স্পষ্ট নয়। আয়ের প্রান্তিক উপযোগ অপরিবর্তনীয় ধরে নিলে এই নির্ভরতা স্পষ্ট হয়ে ওঠে।

(3·2) — (3·5) -এ যে-তুলনামূলক স্থিতাবস্থার ফলাফল পাওয়া গেছে তার থেকে চাহিদা রেখার স্থিতিস্থাপকতা সম্বন্ধে একটি উল্লেখযোগ্য ফল সহজেই পাওয়া যায়। চাহিদার মূল্য-স্থিতিস্থাপকতার সংজ্ঞা হ'ল

$$E_p = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{p}{x} \quad \ldots\ldots (3 \cdot 8)$$

এখানে E_p = চাহিদার মূল্য-স্থিতিস্থাপকতা x = দ্রব্যের চাহিদা এবং p = দ্রব্যের মূল্য। আমাদের আলোচ্য দ্রব্যের মূল্য-স্থিতিস্থাপকতা এই সংজ্ঞা অনুসারে

$$Ep_1 = \frac{d\bar{x}_1}{dp_1} \cdot \frac{p_1}{\bar{x}_1}$$

$$= -\frac{\bar{x}_1}{p_1} \cdot \frac{p_1}{\bar{x}_1} = -1 \qquad \ldots (3.9)$$

(3·9) -এর তাৎপর্য এই যে সাম্যবিন্দুতে চাহিদা রেখার স্থিতিস্থাপকতা একক। বস্তুত, আংশিক সাম্যাবস্থার যে-পরিস্থিতি নিয়ে বর্তমানে আলোচনা হচ্ছে সেখানে চাহিদা রেখার স্থিতিস্থাপকতা সর্বত্রই এক। কারণ, যেহেতু আলোচ্য দ্রব্য ছাড়া অন্যান্য দ্রব্যের মূল্য এবং পরিমাণ সবই পূর্বনির্দিষ্ট আছে তাই আলোচ্য দ্রব্যের উপর আয়ের যে-পরিমাণ খরচ করা হচ্ছে তা নির্দিষ্ট এবং অপরিবর্তিত। কাজেই মূল্য যাই হোক না কেন দ্রব্যটির উপর ভোক্তার মোট খরচ একই থাকছে। এর অর্থ হ'ল

স্থিতিস্থাপকতা চাহিদা রেখার সর্বত্রই একক। এরকম ক্ষেত্রে চাহিদা রেখার জ্যামিতিক নাম রেক্ট্যাংগুলার হাইপারবোলা।

তুলনামূলক স্থিতাবস্থার যে-ফলাফল উপরে আলোচনা করা হ'ল তার সবগুলিই এক একটি প্যারামিটারের এককালীন পরিবর্তনজনিত। প্যারামিটারের সবগুলিই যদি একসঙ্গে পরিবর্তিত হয় এবং সে-পরিবর্তন যদি আনুপাতিক হয় তাহলে চাহিদার উপরে তার প্রভাব কিরকম হবে? অর্থাৎ, ভোক্তার আয় এবং সবগুলি দ্রব্যমূল্য যদি একই অনুপাতে বাড়ানো বা কমানো হয় তাহলে ভোক্তার সাম্যাবস্থার উপরে তার ফল কি হবে? মনে করা যাক নতুন মূল্যাবলি এবং আয় যথাক্রমে $kp_1, kp_2, \ldots, kp_n$ এবং kM। এখানে $k > 0$। নতুন মূল্যাবলি এবং আয়ের জন্য ভোক্তার বাজেট সমীকরণ হবে

$$kp_1x_1 + kp_2x_2^\circ + \ldots + kp_nx_n^\circ = kM$$

অথবা

$$p_1x_1 + p_2x_2^\circ + \ldots + p_nx_n^\circ = M।$$

এই নতুন অবস্থার বাজেট সমীকরণ যেহেতু $(2\cdot3a)$-র সঙ্গে এক তাই নতুন অবস্থার সাম্যমানও একই হবে। অর্থাৎ মূল্যাবলি এবং আয়ের আনুপাতিক পরিবর্তনের ফলে দ্রব্যের চাহিদার কোনো পরিবর্তন হবে না। চাহিদা রেখার এই ধর্মটিকে বলা হয় সমমাত্রিকতার ধর্ম। কারণ, গাণিতিক অর্থে বর্তমান ক্ষেত্রে চাহিদা অপেক্ষক (সমীকরণ $(2\cdot9)$) মূল্য ও আয়ে শূন্য ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক।

4. আয়ের প্রান্তিক উপযোগের অপরিবর্তনীয়তা ও কিছু প্রাসঙ্গিক ফল

আমরা উপরের আলোচনায় আয়ের প্রান্তিক উপযোগ সম্পর্কে একটা স্পষ্ট ধারণা পেয়েছি। গাণিতিক দিক থেকে আয়ের প্রান্তিক উপযোগ একটি লাগ্রাঞ্জ গুণক ছাড়া আর কিছু না। $(2\cdot10)$ এর মধ্যে স্পষ্টই দেখানো হয়েছে যে এই গুণক দ্রব্যমূল্য এবং ভোক্তার নির্দিষ্ট আয়ের উপর নির্ভরশীল। আয়ের প্রান্তিক উপযোগ তাহলে দ্রব্যমূল্য এবং ভোক্তার আয় দুয়ের সঙ্গেই পরিবর্তনীয়। এই প্রান্তিক উপযোগ অপরিবর্তনীয় বললে তাহলে কি বোঝাবে? এই প্রশ্নের দুটি উত্তর সম্ভব। প্রথম, আয়ের প্রান্তিক উপযোগ দ্রব্যমূল্যের পরিবর্তনের সঙ্গে অপরিবর্তনীয়; আর দ্বিতীয়, আয়ের সঙ্গে অপরিবর্তনীয়। এর মধ্যে আমরা প্রথম ব্যাখ্যাটি গ্রহণ করছি। কারণ, চাহিদা রেখার প্রচলিত মার্শালীয় গুণাবলি এই প্রথম ব্যাখ্যার সঙ্গে বেশি সঙ্গতিপূর্ণ।

প্রথম ব্যাখ্যা অনুসারে আয়ের প্রান্তিক উপযোগ অপরিবর্তনীয় এই অংগীকারের অর্থ হ'ল

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = 0 \ (i = 1, \ldots, n) \ldots (4.1)$$

আলোচ্য প্রসংগে আমরা যেহেতু শুধুমাত্র p_1-এর সম্ভাব্য পরিবর্তনের আলোচনা করছি তাই আমরা মূলত $\frac{\partial \lambda}{\partial p_1} = 0$ এই অর্থই ব্যবহার করব।

অধ্যাপক স্যামুয়েলসন্[1] প্রমাণ করেছেন যে (4·1)-এর ব্যাখ্যা মেনে নিলে আমরা প্রান্তিক উপযোগের অপরিবর্তনীয়তার প্রসংগে নিচের ফল-গুলি পেতে পারি।

প্রতিপাদ্য 1·1: **আয়ের প্রান্তিক উপযোগ আয় ও মূল্যাবলিতে —1 ডিগ্রীর একটি সমমাত্রিক অপেক্ষক।**

প্রমাণঃ আমরা জানি যে

$$\lambda \ (p_1, \ldots, p_n, M) = \frac{U_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)}{p_1} \ldots (4.2)$$

এখানে U_{x_1} হ'ল x_1-এর পরিবর্তনজনিত U-এর আংশিক ডেরিভেটিভ্। (1·2) হ'ল প্রথম দ্রব্যের সাম্যাবস্থার শর্ত। আমরা আগেই পেয়েছি যে ভোক্তার চাহিদা রেখা আয় ও মূল্যাবলিতে শূন্য ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক। কাজেই আয় ও সব দ্রব্যের মূল্য যদি একযোগে আনুপাতিক পরিবর্তিত হয় তাহলেও $x_1, \ldots, x_n$-এর সাম্যমান অপরিবর্তিত থাকবে। মনে করা যাক নতুন দ্রব্যমূল্য ও আয় পুরনো দ্রব্যমূল্য ও আয়ের k গুণ, $k > 0$। (4·2)-এর ডানদিকের অনুপাত তাহলে দাঁড়াল

$$\frac{U_{x_1}(x_1, \ldots, x_n)}{kp_1},$$

অর্থাৎ, λ-র বর্তমান মান λk^{-1}।

কাজেই, $\lambda(kp_1, \ldots, kp_n, kM)$

$$= k^{-1} \lambda(p_1, \ldots, p_n, M) \quad . \ (4 \cdot 3)$$

[QED]

[1] P. A. Samuelson—Constancy of the Marginal Utility of Income [*Collected Scientific Papers of P. A. Samuelson*, Vol, I]

প্রতিপাদ্য 4·2

আয়ের প্রান্তিক উপযোগ মূল্যাবলি ও আয়ের সঙ্গে একসাথে অপরিবর্তনীয় থাকতে পারে না।

প্রমাণঃ আয়ের প্রান্তিক উপযোগ যেহেতু -1 ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক তাই অয়লার প্রতিপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই

$$-\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial p_1} p_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial p_2} p_2 + \ldots + \frac{\partial\lambda}{\partial p_n} p_n + \frac{\partial\lambda}{\partial M} M \quad \ldots (4.4)$$

$\frac{\partial\lambda}{\partial p_i}$ 0 $(i = 1, \ldots, n)$ এবং $\frac{\partial\lambda}{\partial M} = 0$ হওয়া (4·4) এর সঙ্গে অসঙ্গতিপূর্ণ। অতএব, আয়ের প্রান্তিক উপযোগ হয় মূল্যাবলির সঙ্গে, নয়তো আয়ের সঙ্গে অপরিবর্তনীয় হতে পারে। (4·4) -এর ডানদিকের সবগুলি পদ একসঙ্গে শূন্য হতে পারে না। [QED]

প্রতিপাদ্য 4·3

আয়ের প্রান্তিক উপযোগের আয়-স্থিতিস্থাপকতা -1।

প্রমাণঃ (4·4) -এর দু-পাশে λ দিয়ে ভাগ করলে আমরা পাই

$$-1 = \frac{\partial\lambda}{\partial p_1}\frac{p_1}{\lambda} + \frac{\partial\lambda}{\partial p_2}\frac{p_2}{\lambda} + \ldots + \frac{\partial\lambda}{\partial p_n}\frac{p_n}{\lambda} + \frac{\partial\lambda}{\partial M}\frac{M}{\lambda} \quad \ldots (4\cdot5)$$

(4·5) -এর ডানদিকের সবগুলি পদই এক একটি স্থিতিস্থাপকতা। আয়ের প্রান্তিক উপযোগ মূল্যাবলির সঙ্গে অপরিবর্তিত ব'লে

$$-1 = \frac{\partial\lambda}{\partial M}\frac{M}{\lambda} \quad \ldots (4.6)$$

[QED]

আয়ের প্রান্তিক উপযোগ সম্পর্কে বর্তমানে যে ব্যাখ্যা গ্রহণ করা হয়েছে এবং উপরের প্রতিপাদ্যগুলিতে ঐ উপযোগের যে-সব গুণাবলি পাওয়া গেল তার সঙ্গে আমরা যদি উপযোগ অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতাকে ব্যবহার করি তাহলে চাহিদার মূল্য-স্থিতিস্থাপকতার ধর্ম পাওয়া যায়।

প্রতিপাদ্য 4·4

চাহিদার মূল্য-স্থিতিস্থাপকতার মান −1।

প্রমাণঃ আমাদের বর্তমান ব্যাখ্যায় আয়ের প্রান্তিক উপযোগ −1 ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক ব'লে আমরা লিখতে পারি

$$\lambda = \frac{\alpha}{M} \quad \dots \ (4\cdot 7)$$

এখানে α যে-কোনো একটি প্যারামিটার। উপযোগ অপেক্ষক যোগসম্ভব ব'লে

$$U(x_1, \dots, x_n) = U_1(x_1) + \dots + U_n(x_n) \quad \dots (4\cdot 8)$$

প্রথম দ্রব্যের সাম্যমান শর্ত

$$\frac{U_1'(x_1)}{p_1} = \lambda = \frac{\alpha}{M} \quad \dots \quad (4\cdot 9)$$

লক্ষণীয় যে (4·9)-এর মধ্যে p_1 ছাড়া অন্যান্য মূল্য অনুপস্থিত। অর্থাৎ $\frac{dx_i}{dp_j} = 0 \ (i \neq j)$। অতএব, x_1-এর চাহিদা অন্যান্য দ্রব্যের মূল্যের উপর নির্ভরশীল নয়।

p_1-এর পরিবর্তনজনিত বাজেট সমীকরণের আংশিক ডেরিভেটিভ্ নিলে আমরা পাই

$$p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} + x_1 + p_2 \frac{\partial x_2}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial x_n}{\partial p_1} = \frac{\partial M}{\partial p_1} = 0 \quad . (4\cdot 10)$$

$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0 \ (i \neq j)$ শর্তটি ব্যবহার করলে (4·10) থেকে পাচ্ছি

$$p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -x_1$$

অথবা

$$\frac{p_1}{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p_1} = -1 \qquad [QED] \quad \dots \quad (4.11)$$

5. উপযোগ অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতা

মার্শালের চাহিদা তত্ত্ব আলোচনায় আমরা ভোক্তার মোট উপযোগ অপেক্ষককে যোগসম্ভব ব'লে ধরে নিয়েছি। শুধু মার্শাল নয়, তাঁর আগে জেভন্স্ (1835-1882), মেঙ্গার (1840-1921) ও ওয়ালরাস্ও তাঁদের তত্ত্বকাঠামোয় যোগসম্ভব উপযোগ অপেক্ষক ব্যবহার করেছিলেন। উপযোগ

অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতার অর্থনৈতিক ও গাণিতিক তাৎপর্য এ'রা কেউই বিশ্লেষণ করেন নি। আলোচ্য দ্রব্যাদি পারস্পরিক অসম্পর্কিত. অর্থাৎ, কোনো একটি দ্রব্যের প্রান্তিক উপযোগ অন্য কোনো দ্রব্যের উপর নির্ভর করে না এ'দের চিন্তায় যোগসম্ভাব্যতার ধারণা শুধু এটুকুই ছিল। এই ধারণা থেকে দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভের সাহায্যে যোগসম্ভাব্যতার সংজ্ঞা নির্দেশ করা চলে। U যদি মোট উপযোগ হয় তাহলে dU/dx_i হ'ল i-তম দ্রব্যের প্রান্তিক উপযোগ। এই প্রান্তিক উপযোগ যদি j-তম দ্রব্যের উপর নির্ভরশীল না হয় তাহলে $\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial x_j} = 0 \; (i \neq j)$। এই সংজ্ঞার তাৎপর্য শুধু এই যে ভোক্তার মোট উপযোগ যদি

$$U = U(x_1, \; \ldots, \; x_n) \qquad \ldots. \; (5 \cdot 1)$$

হয় তাহলে

$$U = U_1(x_1) + \; \ldots + U_n(x_n) \qquad \ldots. (5 \cdot 2)$$

লেখার অর্থই হ'ল

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial x_j} = 0 \; (i \neq j) \qquad \ldots (5.3)$$

ধরে নেওয়া।

$x_1, \; \ldots, \; x_n$ দ্রব্যগুলির প্রত্যেককে এক একটি আলাদা দ্রব্য হিসেবে মনে না ক'রে আমরা যদি কল্পনা করি যে এরা এক একটি দ্রব্যগুচ্ছ তাহলে দ্রব্যাদির অসম্পর্কিত হবার একটা সম্ভাব্য কারণ পাওয়া যায়। মনে করা যাক x_1 হ'ল খাদ্য দ্রব্যাদির একটি গুচ্ছ এবং x_2 হ'ল নানারকম পরিচ্ছদের দ্রব্যগুচ্ছ। এক্ষেত্রে এরকম হওয়া অসম্ভব নাও হতে পারে যে x_1-এর থেকে প্রাপ্য প্রান্তিক উপযোগ x_2-এর ভোগের পরিমাণের উপর নির্ভর করবে না। কিন্তু x_1 একটি খাদ্য দ্রব্য আবার x_2-ও অন্য একটি খাদ্য দ্রব্য এরকম মনে করলে দ্রব্য দুটির প্রান্তিক উপযোগ পরস্পর নির্ভরশীল মনে করাই স্বাভাবিক। দ্রব্যাদি অসম্পর্কিত কিনা তা অনেকটাই নির্ভর করে ভোক্তার ব্যবহারের দিক থেকে তারা কতোটা 'কাছাকাছি' তার উপর। 'কাছাকাছি'র এই ধারণা নিশ্চয়ই অস্পষ্ট। উপযোগ অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতার গাণিতিক বিশ্লেষণ থেকে আমরা এই 'কাছাকাছি'র ধারণাটিকে কিছুটা স্পষ্ট ক'রে নিতে পারি।

(5·3) যদি যোগসম্ভাব্যতার সংজ্ঞা হয় তাহলে প্রশ্ন হ'ল: $U = U(x_1, \; \ldots, \; x_n)$-কে কোন অবস্থায় $U = U_1(x_1) + \ldots + U_n(x_n)$ হিসেবে লেখা সম্ভব? প্রাগাধুনিক অর্থনৈতিক তত্ত্বে এই প্রশ্নের

কোনো উত্তর ছিল না। আধুনিক কালে হাউথেকার[1] একটি প্রতিপাদ্য প্রমাণ করেছেন যার থেকে যোগসম্ভাব্যতার প্রয়োজনীয় ও উপযুক্ত শর্ত আমরা নির্দেশ করতে পারি। বর্তমান প্রসঙ্গে আমরা যোগসম্ভাব্যতার প্রয়োজনীয় শর্ত নির্ধারণ করব।

প্রতিপাদ্য 5.1 (হাউথেকার)ঃ

মোট উপযোগ অপেক্ষক যোগসম্ভব হবার প্রয়োজনীয় শর্ত হ'লঃ

$$\frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial p_k}}{\dfrac{\partial x_j}{\partial p_k}} = \frac{\dfrac{\partial x_i}{\partial M}}{\dfrac{\partial x_j}{\partial M}} \qquad (i \neq k, j \neq k)$$

প্রমাণঃ প্রতিপাদ্যটি প্রমাণের জন্য আমরা সরাসরি তুলনামূলক স্থিতাবস্থার পদ্ধতি ব্যবহার করব। বাজেট সমীকরণের শর্তাধীন মোট উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করে আমরা ভোক্তার সাম্যাবস্থার শর্ত পাইঃ

$$U_i'(x_i) - \lambda p_i = 0 \quad (i = 1, \quad , n) \qquad \ldots (5\ 4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - M = 0 \qquad \ldots (5\ 5)$$

মোট উপযোগ অপেক্ষক যোগসম্ভব ব'লে $U_i'(x_i)$ ডেরিভেটিভ্‌গুলি শুধুমাত্র x_i-এর উপর নির্ভর করছে। এক্ষেত্রে (5·4) এবং (5·5)-এর M এবং p_i-এর পরিবর্তনজনিত ডেরিভেটিভ্‌ নিলে আমরা পাবঃ

$$U_i''(x_i)\frac{\partial x_i}{\partial M} - p_i\frac{\partial \lambda}{\partial M} = 0 (i = 1, \ldots, n) \quad \ldots (5\cdot6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial M} - 1 = 0. \qquad \ldots (5\cdot7)$$

$$U_i''(x_i)\frac{\partial x_i}{\partial p_i} - \lambda - p_i\frac{\partial \lambda}{\partial p_i} = 0 \ (i = 1, \ldots, n) \quad \ldots 5\cdot8)$$

$$U_i''(x_i)\frac{\partial x_i}{\partial p_k} - p_i\frac{\partial \lambda}{\partial p_k} = 0 \ (i, k = 1, \ \ldots, n;\ i \neq k) \ldots (5\cdot9)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + x_k = 0 \ (k = 1, \ldots, n) \qquad \ldots (5\cdot10)$$

---

[1] H. S. Houthakker—Additive Preferences [Econometrica, Vol. 28, 1960]

(5·6) ও (5·7) থেকে আমরা পাই

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left\{\frac{p_i}{U_i''(x_i)}\right\} \frac{\partial\lambda}{\partial M} = 1.$$

অথবা

$$\frac{1}{\frac{\partial\lambda}{\partial M}} = \sum_{i=1}^{n} p_i \left\{\frac{p_i}{U_i''(x_i)}\right\} \quad \ldots (5\cdot11)$$

(5·8) ও (5·9) থেকে যথাক্রমে পাই

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = \frac{\lambda}{U_i''(x_i)} + \frac{p_i}{U_i''(x_i)} \frac{\partial\lambda}{\partial p_i} \quad \ldots (5\cdot12)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = \frac{p_i}{U_i''(x_i)} \frac{\partial\lambda}{\partial p_k} \quad (5\cdot13)$$

এখন (5·10)—(5·13) পর্যন্ত একসঙ্গে নিলে আমরা পাই

$$\frac{\partial\lambda}{\partial p_i} = -\frac{\partial\lambda}{\partial M}\left(x_i + \mu\frac{\partial x_i}{\partial M}\right)(i = 1, \ldots, n); \quad \ldots (5\cdot14)$$

এখানে $\mu = \lambda/(\partial\lambda/\partial M)$। হাউথেকার এই রাশিটির নাম দিয়েছেন 'আয়ের নমনীয়তা'। আবার (5·9) ও (5·14) থেকে আমরা পাই

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = -\frac{p_i}{U_i''(x_i)}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial M}\left(x_k + \mu\frac{\partial x}{\partial M}\right)\right]$$

$$= -\frac{\partial x_i}{\partial M}\left(x_k + \mu\frac{\partial x_k}{\partial M}\right) \quad (i \neq k) \quad \ldots (5\cdot15)$$

অতএব,

$$\frac{\frac{\partial x_i}{\partial p_k}}{\frac{\partial x_j}{\partial p_k}} = \frac{-\frac{\partial x_i}{\partial M}\left(x_k + \mu\frac{\partial x_k}{\partial M}\right)}{-\frac{\partial x_j}{\partial M}\left(x_k + \mu\frac{\partial x_k}{\partial M}\right)}$$

$$= \frac{\frac{\partial x_i}{\partial M}}{\frac{\partial x_j}{\partial M}} \quad (i \neq k, j \neq k) \quad \ldots (5\cdot16)$$

(5·16)-এর অর্থনৈতিক তাৎপর্য পরিষ্কার। k-তম দ্রব্যের মূল্যের পরিবর্তনজনিত i-তম দ্রব্যের চাহিদার পরিবর্তনকে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_k} \Big/ \frac{\partial x_j}{\partial M}\right)\frac{\partial x_i}{\partial M}$$

$$= w \frac{\partial x_i}{\partial M} \qquad (i \neq k) \qquad \ldots.(5 \cdot 17)$$

অর্থাৎ, যে-কোনো দ্রব্যের অপ্রত্যক্ষ মূল্য প্রভাব ঐ দ্রব্যের আয় প্রভাবের আনুপাতিক। w অনুপাতটি লক্ষণীয়। এই অনুপাতটিও হ'ল একটি মূল্য প্রভাব ও আয় প্রভাবের অনুপাত। তবে w-এর মধ্যে শুধু j-তম দ্রব্যের মূল্য প্রভাব ও আয় প্রভাব বর্তমান। i-তম দ্রব্যের উপরে যে-প্রভাব তা এর মধ্যে নেই। যে-দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তনজনিত প্রভাব আলোচনা করা হচ্ছে (বর্তমানে k-তম দ্রব্যের) w-অনুপাতটি তার উপর নির্ভর করছে। i-তম দ্রব্যের বদলে আমরা যদি, ধরা যাক, s-তম দ্রব্যের উপর k-তম দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তনের প্রভাব আলোচনা করতাম, তা হলেও w-অনুপাতটির মান একই থাকত।

হাউথেকারের প্রতিপাদ্যের বক্তব্য তা হলে দাঁড়াল এই যে ভোক্তার মোট উপযোগ অপেক্ষক যোগসম্ভব হতে গেলে ভোক্তার কাছে যে-কোনো দ্রব্য যুগ্মের অপ্রত্যক্ষ মূল্য প্রভাব আয় প্রভাবের আনুপাতিক হওয়া প্রয়োজন। ঐ দ্রব্যযুগ্ম ভোক্তার ব্যবহারিক বিচারে কাছাকাছি কিনা তারও নির্দেশ আমরা এই প্রতিপাদ্য থেকে পাচ্ছি। দ্রব্যযুগ্মের মূল্য প্রভাব ও আয় প্রভাবের মধ্যে যদি আনুপাতিক সম্পর্ক বর্তমান থাকে তাহলে একটির প্রান্তিক উপযোগ অন্যটির উপর নির্ভর করবে না;[1] অতএব, দ্রব্য দুটি এই অর্থে কাছাকাছি নয়—দূরবর্তী। দ্রব্যাদির মধ্যেকার পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য হাউথেকারের এই প্রতিপাদ্য গুরুত্বপূর্ণ।

———

1 এই মন্তব্যের যাথার্থ্য স্পষ্টতই নির্ভর করছে (5·16)-এর শর্তটি উপযুক্ত শর্ত কিনা তার উপর। এই শর্ত উপযুক্ত শর্তও বটে। এর প্রমাণের জন্য দ্র· হাউথেকার পূর্বোল্লিখিত।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ

উপযোগের পরিমাপ

1. পরিমাপ সম্পর্কে কিছু ধারণা

বাস্তবের ও বিজ্ঞানের নানা প্রয়োজনে পরিমাপের প্রচলন বহু পুরনো হ'লেও পরিমাপ সম্পর্কে বৈজ্ঞানিক চিন্তা কিন্তু তুলনায় আধুনিক কালের। আমরা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে দৈর্ঘ্য, আয়তন, ওজন, সময়, তাপ ইত্যাদি বিভিন্ন জিনিসকে পরিমাপ ক'রে থাকি। পদার্থবিদ্যা, রসায়নবিদ্যার মতো প্রাকৃতিক বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখাতে পরিমাপের প্রয়োজন অত্যন্ত জরুরি। সেখানে এইসব সাধারণত ব্যবহৃত ধারণাগুলি ছাড়াও আরো অনেক কিছু পরিমাপ করার প্রয়োজন পড়ে। যেমন, গতিবেগ, ত্বরণ, তরল পদার্থের সান্দ্রতা ইত্যাদি। আধুনিক কালে সমাজবিজ্ঞানে, বিশেষত অর্থনীতির বিভিন্ন ক্ষেত্রে পরিমাপের অবকাশ এবং প্রয়োজন ক্রমশ বাড়ছে। একটু চিন্তা করলেই দেখা যাবে যে পরিমাপ ধারণাটিকে আপাতদৃষ্টিতে যত সরল ব'লে মনে হয়, আসলে ন্যায়তাত্ত্বিক দিক থেকে ধারণাটি অত সরল নয়। এবং পরিমাপ বলতে বিভিন্ন ধারণার প্রসঙ্গে ঠিক একই প্রক্রিয়া বোঝায় না। যেমন, দৈর্ঘ্য বা ওজন যে-অর্থে পরিমাপযোগ্য তাপ সে-অর্থে পরিমাপযোগ্য নয়। এ দুয়ের মধ্যে একটা বড় রকমের তফাত সহজেই নির্দেশ করা চলে। দুটি টেবিলের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য যদি 4 ফুট ক'রে হয় তাহলে টেবিল দুটির মোট দৈর্ঘ্য 8 ফুট। কিংবা দুটি বস্তুর মধ্যে একটির ওজন যদি 3 কিলোগ্রাম এবং অপরটির যদি 6 কিলোগ্রাম হয় তাহলে দ্বিতীয়টি প্রথমটির তুলনায় দ্বিগুণ ভারি। কিন্তু তাপের বেলায় এ ধরনের কোনো কথা বলা চলে না। একটি বস্তুর তাপ যদি 30°C হয় তাহলে যে-বস্তুর তাপ 60°C তার তুলনায় প্রথমটি অর্ধেক শীতল বা দুটি বস্তুর মোট তাপ 90°C এরকম কথার কোনো মানে নেই।[1] বিভিন্ন ব্যক্তির বুদ্ধিবৃত্তির পরিমাপ করার জন্য পরিসংখ্যান পদ্ধতিতে

1 এরকম কথার মানে যে নেই সেটা সহজে বোঝা যায় যদি আমরা 30°C এবং 60°C-কে যথাক্রমে ফারেনহাইটে প্রকাশ করি। সেক্ষেত্রে একটি আর একটির দ্বিগুণ আর থাকবে না। কিন্তু ওজন বা দৈর্ঘ্যের বেলায় কিলোগ্রামে বা পাউন্ডে অথবা ইঞ্চিতে বা মিটারে প্রকাশ করলেও আনুপাতিক সম্পর্ক নষ্ট হয় না। এই প্রসঙ্গের বিস্তৃত আলোচনা পরে পাওয়া যাবে।

IQ মাপবার রীতি এখন বেশ প্রচলিত। দু'জন ব্যক্তির IQ-এর তুলনা ক'রে কে বেশি বুদ্ধিমান তার নির্দেশ পাওয়া যায়; কিন্তু বুদ্ধিমান ব্যক্তির বুদ্ধি অন্যজনের তুলনায় ঠিক কতোটা বেশি তার কোনো নির্দেশ পাওয়া যায় না। ধাতব দ্রব্যের কাঠিন্য পরিমাপ করার জন্য মো'র স্কেল ব্যবহার করা হয়ে থাকে। এখানেও দুটি ধাতুর মধ্যে কোনটি বেশি কঠিন তার নির্দেশ পাওয়া যায়, কিন্তু একটির কাঠিন্য অপরটির তুলনায় কতো বেশি তা জানা যায় না। অথবা দুটি ধাতুর মোট কাঠিন্য কতো এ প্রশ্নও অবান্তর।

উপরের উদাহরণগুলি থেকে একটা কথা স্পষ্ট বোঝা গেল যে আমাদের ব্যবহৃত পরিমাপ বিভিন্ন প্রসঙ্গে বিভিন্ন চরিত্রের হয়ে থাকে। কোথাও পরিমাপ শুধু দুটি পরিমেয় বস্তুর মধ্যে তুলনায় সাহায্য করে, কোথাও তা বস্তু দুটির তুলনীয় গুণের সংখ্যাগত পার্থক্যও স্পষ্ট ক'রে নির্দেশ করে। আধুনিক পরিমাপ তত্ত্বের উদ্দেশ্য হ'ল বিভিন্ন রকমের পরিমাপের চরিত্র বিশ্লেষণ ক'রে তাদের মধ্যে শ্রেণীবিন্যাস করা এবং পরিমাপের ন্যায়তাত্ত্বিক ভিত্তি সুঠাম ক'রে গড়ে তোলা।

পরিমাপ সম্বন্ধে স্পষ্ট চিন্তা করতে গেলে প্রথমেই জানা প্রয়োজনঃ 'পরিমাপ কাকে বলে ?' এ-প্রশ্নের উত্তরে এটুকু বলা চলে যে কোনো বস্তুর নির্বাচিত কোনো গুণ বা ধর্মকে নির্দেশ করাই (অর্থাৎ, তুলনীয় অন্যান্য বস্তুর তুলনীয় গুণ বা ধর্মের সঙ্গে তফাত করা) হ'ল পরিমাপের লক্ষ্য। এবং সংখ্যার সাহায্যে এই তফাত নির্দেশ করাকেই পরিমাপ বলে। মনে করা যাক একটি ঘরে পাঁচজন লোক আছে। এই পাঁচজন লোকের স্বরূপ ভিন্ন ভিন্ন। কাজেই তাদের এই ভিন্ন স্বরূপকে নির্দেশ বা চিহ্নিত করার জন্য 1, 2, 3 ইত্যাদি সংখ্যার ব্যবহার করা যেতে পারে। এই সংখ্যাগুলির সাহায্যে ঘরের পাঁচজন লোকের মধ্যে একজনকে আর একজন থেকে আলাদা ক'রে নেওয়া যেতে পারে। এখানে লক্ষণীয় যে সংখ্যার ব্যবহার ক'রে আমাদের বর্তমান উদাহরণে যে-উদ্দেশ্য সাধিত হচ্ছে সংখ্যার বদলে নাম ব্যবহার ক'রলেও সেই একই উদ্দেশ্য সমভাবে সাধিত হতে পারত। আমাদের উদ্দেশ্য যদি পাঁচজন লোকের স্বরূপের ভিন্নতা নির্দেশ করা হয় তাহলে এক একজন লোকের জন্য এক একটি আলাদা সংখ্যা ব্যবহার করলে সেই উদ্দেশ্য সাধিত হচ্ছে। নামের সাহায্যেও সেই একই উদ্দেশ্য সাধিত হতে পারে যদি এক একটি লোকের জন্য এক একটি আলাদা নাম ব্যবহার করা হয়। নাম করণের এই যে প্রক্রিয়া নিঃসন্দেহে এটি একটি পরিমাপ প্রক্রিয়া। এবং এই অর্থে পরিমাপ প্রক্রিয়া সব সময়ে সংখ্যা-নির্ভর

হবার কোনো বাধ্যবাধকতা নেই। তবে বর্তমান আলোচনায় নামকরণের মাধ্যমে যে-পরিমাপ তার আলোচনা আমরা বিশদভাবে করছি না। নামকরণ ছাড়াও আরো নানা উদ্দেশ্যে ব্যবহৃত যে-সব পরিমাপ প্রক্রিয়া তাদের ন্যায়তাত্ত্বিক ভিত্তি আলোচনাই আমাদের বর্তমান উদ্দেশ্য।

পরিমেয় বস্তুকে সংখ্যার সাহায্যে নির্দেশ করাকেই পরিমাপ বলে। এক সময়ে এমন মনে করা হত যে পরিমাপের জন্য কোনো একটি বাস্তব প্রক্রিয়ার অস্তিত্ব প্রয়োজন। উদাহরণ হিসেবে দৈর্ঘ্য পরিমাপের প্রসঙ্গটি আলোচনা করা যেতে পারে। যে-কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য কতো তা জানবার জন্য প্রথমেই প্রয়োজন একটি স্থির একক নির্বাচন করবার। মনে করা যাক একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ফিতেকে আমরা দৈর্ঘ্যের এক একক হিসেবে নির্বাচন করলাম। এই এককের নাম দেওয়া গেল এক ফুট। এই স্থির মাপের একককটিকে পরিমেয় বস্তুব সংগে মেলাতে হবে। এই মেলানোর প্রক্রিয়াটি একটি বাস্তব প্রক্রিয়া। এই বাস্তব প্রক্রিয়ার মাধ্যমে আমরা জানতে পারি আমাদের আলোচ্য বস্তুর দৈর্ঘ্য ঐ নির্বাচিত এককের কতো এককের সমান। এই প্রক্রিয়ার মাধ্যমে আমরা বস্তুটির দৈর্ঘ্যকে একটি নির্দিষ্ট সংখ্যার সাহায্যে নির্দেশ করতে পারি। যে-কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য যখন বলা হয় 5 ফুট তখন আমরা যা বোঝাতে চাই তা এই যে আলোচ্য বস্তুর দৈর্ঘ্য নির্বাচিত এককের 5 গুণের সমান। এই নির্বাচিত একক এবং বাস্তব প্রক্রিয়ার পুনঃপুনঃ ব্যবহারের সাহায্যে আমরা বিভিন্ন বস্তুর দৈর্ঘ্য সংখ্যার সাহায্যে নির্দেশ করতে পারি।

এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে যে-নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের ফিতেকে আমরা পরিমাপের একক হিসেবে গ্রহণ করেছি তা পুরোপুরি আমাদের ইচ্ছাধীন। মনে করা যাক আমরা নতুন একটি একক নির্বাচন করলাম যার দৈর্ঘ্য আগের এককের বারো ভাগের এক ভাগ। এই নতুন এককের নাম দিলাম এক ইঞ্চি। এই নতুন এককের সাহায্যে পরিমাপ করলে পরিমেয় বস্তুর দৈর্ঘ্য হিসেবে যে-সংখ্যা পাওয়া যাবে তা সব ক্ষেত্রে আগের সংখ্যার তুলনায় বারো গুণ বড়। যে-বস্তুর দৈর্ঘ্য ফুটের হিসেবে ছিল 5 তার দৈর্ঘ্য ইঞ্চির হিসেবে হবে 60। অর্থাৎ, দেখা গেল যে পরিমেয় বস্তুর পরিমাপ হিসেবে শুধু সংখ্যা নির্দেশ করাই যথেষ্ট নয়; পরিমাপের ধারণা পুরোপুরি পেতে গেলে সংখ্যাটি কোন এককের সাহায্যে পাওয়া গেছে তাও নির্দেশ করা প্রয়োজন। সেই জন্যই দৈর্ঘ্যের পরিমাপ 5, 60 ইত্যাদি বললে ধারণা পরিষ্কার হ'ল না—বলতে হবে 5 **ফুট, 60 ইঞ্চি** ইত্যাদি।

উপরের উদাহরণটি প্রসঙ্গে লক্ষ্য করা দরকার যে যে-বাস্তব প্রক্রিয়ার

সাহায্যে আমরা দৈর্ঘ্য পরিমাপ করেছি তার সঙ্গে গাণিতিক যোগ প্রক্রিয়ার এক আশ্চর্য মিল রয়েছে। আমরা যখন দুটি সংখ্যাকে যোগ করি তখন কোন সংখ্যাটি আগে নিলাম কোন সংখ্যাটি পরে নিলাম যোগফলের উপর তার কোনো প্রভাব পড়ে না। x এবং y যদি দুটি সংখ্যা হয় তাহলে $x + y = y + x$। যোগ প্রক্রিয়ার এই ধর্মকে বলা হয় বিনিময় নিয়ম। গাণিতিক যোগ একটি বিনিময়যোগ্য প্রক্রিয়া। ঠিক তেমনি গাণিতিক যোগের আর একটি ধর্ম হ'ল সংযোগসম্ভাব্যতা। এই ধর্মটিকে সংযোগ নিয়মের সূত্রাকারে প্রকাশ করা চলে। x, y, z যদি তিনটি সংখ্যা হয় তাহলে $x + (y + z) = (x + y) + z$। আমরা জানি যে বিনিময় নিয়ম ও সংযোগ নিয়ম গাণিতিক যোগ প্রক্রিয়ার দুটি বিশিষ্ট ধর্ম। দৈর্ঘ্য পরিমাপ করার উদাহরণ থেকে স্পষ্ট দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে যে-বাস্তব প্রক্রিয়ার সাহায্যে কোনো বস্তুর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা হয় সেই প্রক্রিয়াও বিনিময় ও সংযোগ নিয়ম পালন করে। অর্থাৎ, দৈর্ঘ্য পরিমাপ করার প্রক্রিয়াটি মূলত যোগ প্রক্রিয়ার সামিল। একটু চিন্তা করলে দেখা যাবে যে শুধু দৈর্ঘ্য নয় ওজন পরিমাপের প্রক্রিয়াটিও যোগ প্রক্রিয়ার সামিল।

পরিমাপের বাস্তব প্রক্রিয়ার সঙ্গে গাণিতিক যোগ প্রক্রিয়ার এই সাযুজ্যের কথা কল্পনা ক'রে এক সময়ে এমন মনে করা হ'ত যে যোগসম্ভাব্যতা বুঝি পরিমাপযোগ্যতার মৌলিক শর্ত। কিন্তু বিজ্ঞানের অগ্রগতি ও পরিমাপের বিস্তারের সঙ্গে সঙ্গে দেখা গেছে যে নানা উদ্দেশ্যে নানারকমের পরিমাপের প্রয়োজন পড়ে এবং তাদের সবার মধ্যে যোগসম্ভাব্যতা বর্তমান থাকে না। এই প্রসঙ্গে তাপের পরিমাপ বা IQ-এর পরিমাপের কথা আগে উল্লেখ করা হয়েছে। অর্থনীতির প্রয়োজনে উপযোগ পরিমাপ করা হয়, কিন্তু তা সব সময়ে যোগসম্ভবভাবে পরিমাপের প্রয়োজন পড়ে না। প্রয়োজনের এই বৈচিত্র্যের জন্যই একথা মনে করার কোনো কারণ নেই যে যোগসম্ভাব্যতা পরিমাপের মৌলিক শর্ত। আমরা এ পর্যন্ত যে উদাহরণগুলির উল্লেখ করেছি তার থেকেই একথা স্পষ্ট যে ন্যায়তাত্ত্বিক দিক থেকে পরিমাপের প্রসঙ্গে দুটি ধারণা মৌলিকঃ (*i*) পরিমেয় গুণ বা ধর্মের সংখ্যায় প্রতিরূপায়ণ এবং (*ii*) প্রতিরূপায়ণের একত্ব বিচার। বাস্তবের যে কোনো গুণ বা ধর্মকে সংখ্যার সাহায্যে বর্ণনা, অর্থাৎ, প্রতিরূপায়ণ করতে পারলেই যে সেই প্রতিরূপায়ণ মাত্র এক রকমেই করা যাবে এমন কোনো কথা নেই। দৈর্ঘ্যের প্রসঙ্গে আমরা দেখেছি যে একই বস্তুর দৈর্ঘ্যের বর্ণনায় আমরা বিভিন্ন সংখ্যা ব্যবহার করতে পারি। অর্থাৎ প্রতিরূপায়ণ সেখানে এক রকমেই মাত্র সম্ভব হচ্ছে তা নয়। বস্তুত একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যকে

আমরা কোন সংখ্যায় প্রতিরূপায়িত করছি তা নির্ভর করছে ব্যবহৃত এককের উপর। যেহেতু এককের ব্যবহার আমাদের ইচ্ছাধীন তাই প্রতিরূপায়ণও একাধিক রকমের হতে পারে। যে-কোনো একটি নির্দিষ্ট প্রসঙ্গে কতো রকমের প্রতিরূপায়ণ সম্ভব বা সম্ভাব্য প্রতিরূপায়ণগুলির মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা তা নির্ণয় করার সমস্যাটিকে বলে প্রতিরূপায়ণের একত্ব বিচার। পরিমাপের স্কেল নির্ধারণ করা বলতে এই একত্ব নির্ণয় করাকে বোঝায়। প্রতিরূপায়ণ ও তার একত্ব বিচারের সমস্যা দুটিকে আমরা সুপেস্ ও জিন্স্-এর তত্ত্ব অনুসারে ব্যাখ্যা করব।

2. পরিমাপ তত্ত্বঃ সুপেস্ ও জিন্স্[1]

পরিমাপের জন্য প্রাথমিক প্রয়োজন হ'ল পরিমেয় বস্তুসমূহকে স্পষ্ট-ভাবে নির্বাচন করা। মনে করা যাক E একটি সেট যার অন্তর্গত পদ e_1, e_2, $\ldots$ হ'ল বাস্তবের নির্বাচিত বস্তুসমূহ। আমরা ধরে নিচ্ছি E-সেটটি স্পষ্টভাবে নির্দেশ করা আছে। শুধু E সেটই নয়, e_1, e_2, $\ldots$ ইত্যাদির মধ্যেকার কিছু সম্পর্কও আমাদের কাছে দেওয়া আছে ব'লে কল্পনা করা হচ্ছে। আমাদের পরিমেয় বস্তু যদি হয় নির্বাচিত কিছু লোকের উচ্চতা তাহলে e_1, e_2, $\ldots$ ইত্যাদি হ'ল সেই নির্বাচিত উচ্চতা।[2] লক্ষ্য করা দরকার যে e_1, e_2, $\ldots$ এর মধ্যে যে-সম্পর্ক দেওয়া আছে বলে কল্পনা করা হচ্ছে তা কিন্তু এম্পিরিকাল সম্পর্ক—গাণিতিক বা, সাধারণভাবে ন্যায়তাত্ত্বিক অনুমানের কোনো অবকাশ এখানে নেই। যেমন e_1 উচ্চতা হয়ত e_2-এর চেয়ে বেশি। সেক্ষেত্রে নির্দিষ্ট এম্পিরিকাল সম্পর্কটি হ'ল $e_1 > e_2$। E সেটের অন্তর্গত পদগুলি কি কি এবং তাদের মধ্যে এম্পি-রিকাল সম্পর্ক (আমাদের নির্বাচিত গুণ বা ধর্মের প্রসঙ্গে) কি তা পরি-মাপের জন্য শুরুতেই দেওয়া আছে ব'লে ধ'রে নিতে হবে। পরিমাপের কাজ ঐ সম্পর্কটি বা সম্পর্কগুলিকে যথাযথভাবে সংখ্যার সাহায্যে নির্দেশ করা। অতএব E সেটের অন্তর্ভুক্ত সম্পর্কগুলির প্রতিরূপায়ণের জন্য আর একটি সেট কল্পনা করা প্রয়োজন; মনে করা যাক N এমন একটি সেট যার

---

[1] P. Suppes & J. L. Zinnes— Basic Measurement Theory [Luce, Bush & Galanter সম্পাদিত *Handbook of Mathematical Psychology,* Vol. I].

[2] এখানে খেয়াল রাখা দরকার যে e_1, e_2, $\ldots$ ইত্যাদি কোনো সংখ্যা নয়; e_1 = প্রথম ব্যক্তির উচ্চতা, e_2 = দ্বিতীয় ব্যক্তির উচ্চতা,...ইত্যাদি। বস্তুত e_1, e_2, $\ldots$ ইত্যাদিকে সংখ্যার সাহায্যে বর্ণনা করাই প্রতিরূপায়ণের উদ্দেশ্য।

অন্তর্ভুক্ত পদগুলি হ'ল $n_1, n_2, \ldots$ ইত্যাদি। $n_1, n_2, \ldots$ হ'ল 1, 2, 3, ... ইত্যাদি পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ বা অনুরূপ কোনো সংখ্যা-গোষ্ঠী। এই সংখ্যাগোষ্ঠীর পদগুলির মধ্যে কিছু বীজগণিতীয় সম্পর্ক বর্তমান। প্রতিরূপায়ণের সমস্যা হ'ল E সেট এবং N সেটের মধ্যে এমন একটা চিত্রণের অস্তিত্ব প্রমাণ করা যাতে ক'রে E-এর অন্তর্গত এম্পিরিকাল সম্পর্ক N-এর অন্তর্গত বীজগণিতীয় সম্পর্কের মধ্যে পুরোপুরি বজায় থাকে। এরকম চিত্রণ পেলে আমরা $e_1, e_2, \ldots$ ইত্যাদি এম্পিরিকাল পদগুলিকে যথাযথভাবে $n_1, n_2, \ldots$ ইত্যাদি সংখ্যার সাহায্যে বর্ণনা করতে পারি।

প্রতিরূপায়ণ ও তার একত্বের সমস্যা দুটিকে পরিষ্কার ব্যাখ্যা করার জন্য আল্‌ফ্রেড্‌ টার্বস্কি প্রবর্তিত সম্পর্কগত ব্যবস্থা ও সংশ্লিষ্ট কিছু ধারণার সঙ্গে পরিচিত হওয়া প্রয়োজন।

সংজ্ঞা 2·1

সম্পর্কগত ব্যবস্থাঃ— A যদি একটি অ-শূন্য সেট হয় এবং $R_1, \ldots, R_n$ যদি সেই সেটের উপরে সংজ্ঞায়িত n-সংখ্যক সম্পর্ক হয় তাহলে $U = \langle A, R_1, \ldots, R_n \rangle$ এই সসীম পরম্পরাকে বলে একটি সম্পর্কগত ব্যবস্থা। A-কে বলে সম্পর্কগত ব্যবস্থাটির ডোমেন।

আমাদের আলোচ্য এম্পিরিকাল ব্যবস্থাটির মধ্যে যদি একটিই সম্পর্ক থাকে R_1, তাহলে সেক্ষেত্রে $U = \langle A, R_1 \rangle$। এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে পরিমাপের জন্য যে-এম্পিরিকাল ব্যবস্থা গ্রহণ করা হবে তার মধ্যে শুধু সম্পর্ক নয়, বিভিন্ন বাস্তব প্রক্রিয়াও প্রাসঙ্গিক হতে পারে। যেমন, দৈর্ঘ্য বা ওজনের প্রসঙ্গে যোগ প্রক্রিয়া। মনে হতে পারে সম্পর্ক-গত ব্যবস্থার যে-সংজ্ঞা এখানে দেওয়া হ'ল তাতে এম্পিরিকাল পদগুলির মধ্যেকার বিভিন্ন প্রক্রিয়া বুঝি আলোচনার বাইরে থেকে যাচ্ছে। তা কিন্তু ঠিক নয়, কারণ, যে-কোনো প্রক্রিয়াকেই একটি সম্পর্ক হিসেবে সংজ্ঞা দেওয়া যায়। যোগ প্রক্রিয়ার উদাহরণটি আলোচনা করা যাক। মনে করা যাক '+' এমন একটি দ্বিপদ প্রক্রিয়া যাতে ক'রে x, y যদি A-র অন্তর্ভুক্ত পদ হয় তাহলে $x + y = z$। এই প্রক্রিয়াটিকে একটি ত্রিপদ সম্পর্ক হিসেবে প্রকাশ করা যায়ঃ $T(x, y, z)$ যদি এবং একমাত্র যদি $x + y = z$[1]।

[1] '+' চিহ্নের সাহায্যে যে-প্রক্রিয়া বোঝান হচ্ছে তা কিন্তু শুধুমাত্র গাণিতিক যোগপ্রক্রিয়া নয়। x এবং y হয়ত যথাক্রমে দুটি টেবিলের দৈর্ঘ্য এবং z হ'ল এই দুই টেবিলের যোগফল হিসেবে প্রাপ্য দৈর্ঘ্য। এক্ষেত্রে '+' দুটি টেবিলের দৈর্ঘ্য যোগ করবার বাস্তব প্রক্রিয়াকে বোঝাচ্ছে।

সংজ্ঞা 2·2

সম্পর্কগত ব্যবস্থার সমগঠনঃ— মনে করা যাক $\boldsymbol{A}=<A, R>$ এবং $\boldsymbol{B}=<B, S>$ দুটি সম্পর্কগত ব্যবস্থা। R এবং S দুইই দ্বিপদ সম্পর্ক। মনে করা যাক $f: A \rightarrow B$ হ'ল A থেকে B-তে যাবার একটি এক-এক চিত্রণ (অপেক্ষক)। এখন $\boldsymbol{A}$ এবং $\boldsymbol{B}$ ব্যবস্থা দুটিকে **সমগঠন** বলা হবে যদি A-র যে-কোনো পদযুগ্ম $a, b \in A$-এর জন্য $aRb \rightarrow f(a)Sf(b)$ সত্য হয়। এখানে স্পষ্টত $f(a), f(b) \in B$।

এক্ষেত্রে B সেটকে A সেটের **সমগাঠনিক প্রতিবিম্ব** বলা হয়। লক্ষণীয় যে B যদি A-র সমগাঠনিক প্রতিবিম্ব হয় তাহলে B এবং A-র পদসংখ্যা সমান হতে বাধ্য।

সংজ্ঞা 2·3

সদৃশগঠনঃ— সংজ্ঞা 2·2-এ f চিত্রণ (বা অপেক্ষক)-টি যদি এক-একের বদলে বহু-এক হয় তাহলে ব্যবস্থা দুটিকে বলা হবে **সদৃশগঠন**।

সম্পর্কগত ব্যবস্থার যে-সংজ্ঞা উপরে দেওয়া হ'ল তাতে করে সাংখ্যিক এবং এম্পিরিকাল দুরকম সম্পর্কগত ব্যবস্থা একই সংজ্ঞার সাহায্যে বর্ণনা করা সম্ভব। ব্যবস্থাটির ডোমেন যদি এমন কোনো সেট হয় যে তার পদগুলি সব সংখ্যা তাহলে ব্যবস্থাটিকে বলা হবে **সাংখ্যিক সম্পর্কগত ব্যবস্থা**; আর ডোমেন সেটের পদগুলি যদি হয় কোনো এম্পিরিকাল বস্তু তাহলে ব্যবস্থাটিকে বলা হবে **এম্পিরিকাল সম্পর্কগত ব্যবস্থা**।

সংজ্ঞা 2·4

প্রতিরূপায়ণঃ— মনে করা যাক $\boldsymbol{A}=<A, R_1>$ এবং $\boldsymbol{N}=<N, R_2>$ যথাক্রমে একটি এম্পিরিকাল ও সাংখ্যিক সম্পর্কগত ব্যবস্থা। A হ'ল এম্পিরিকাল বস্তুর সেট এবং N হ'ল প্রকৃত সংখ্যার সেট। R_1, R_2 যথাক্রমে এম্পিরিকাল ও সাংখ্যিক সম্পর্ক। এখন $f: A \rightarrow N$ যদি সমগঠন (বা সদৃশগঠন) কোনো চিত্রণ হয় তাহলে f-কে বলা হয় $\boldsymbol{N}$-এর উপর $\boldsymbol{A}$-র প্রতিরূপায়ণ।

কোনো একটি এম্পিরিকাল ব্যবস্থার সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব কি-না তা নির্ভর করছে ঐ এম্পিরিকাল ব্যবস্থার অন্তর্ভুক্ত ডোমেন সেট থেকে কোনো সাংখ্যিক ব্যবস্থার ডোমেনে পৌঁছবার মতো কোনো সমগঠন (বা সদৃশগঠন) চিত্রণের অস্তিত্ব সম্ভব কিনা তার উপর। এখন বুঝতে পারা

যাচ্ছে যে এরকম কোনো চিত্রণ যদি থাকে তাহলে সেই চিত্রণের সাহায্যে A-র অন্তর্ভুক্ত যে-কোনো পদের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট একটি সংখ্যা পাওয়া যাবে। সেই সংখ্যাটিকে বলা হবে ঐ চিত্রণ অনুসারে প্রাপ্য এম্পিরিকাল পদটির সাংখ্যিক মান। এম্পিরিকাল ডোমেন থেকে সাংখ্যিক ডোমেনে পৌঁছবার সমগঠন (বা সদৃশগঠন) চিত্রণ যদি একাধিক হয় তাহলে এম্পিরিকাল পদটির সাংখ্যিক মানও হবে একাধিক। এই একাধিক সাংখ্যিক মানের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কিনা তা বিচার করাই হ'ল প্রতিরূপায়ণের একত্ব বিচার বা পরিমাপের স্কেল নির্ধারণ। এই প্রসঙ্গে স্কেলের ধারণাটিকে পরিষ্কার করা যেতে পারে।

কোনো একটি এম্পিরিকাল সম্পর্কগত ব্যবস্থাকে যখনই কোনো সমগঠন (বা সদৃশগঠন) চিত্রণের সাহায্যে কোনো সাংখ্যিক ব্যবস্থায় প্রতিরূপায়ণ করা সম্ভব হয়, তখনই এম্পিরিকাল ডোমেনের প্রত্যেক পদের একটি সাংখ্যিক মান পাওয়া যায়। এই প্রতিরূপায়ণই হ'ল ঐ এম্পিরিকাল ব্যবস্থার একটি পরিমাপ—এবং পরিমাপটি অবশ্যই কোনো একটি স্কেল অনুসারে পাওয়া গেল। স্কেল তাহলে কাকে বলা হচ্ছে? নিচের সংজ্ঞায় এর উত্তর পাওয়া যাচ্ছে।

সংজ্ঞা 2·5

পরিমাপের স্কেলঃ— মনে করা যাক U একটি এম্পিরিকাল সম্পর্কগত ব্যবস্থা, N একটি সাংখ্যিক সম্পর্কগত ব্যবস্থা এবং f U-এর ডোমেন থেকে N-এর ডোমেনে পৌঁছবার একটি সমগঠন (বা সদৃশগঠন) চিত্রণ। $< U, N, f >$ এই ক্রমবিন্যস্ত ত্রয়ীকে বলা হয় U-এর পরিমাপের স্কেল।

লক্ষণীয় যে পরিমাপ বা প্রতিরূপায়ণ করতে পারলেই একটি স্কেল পাওয়া গেল। অথবা, স্কেল ছাড়া প্রতিরূপায়ণ সম্ভব নয়। স্কেল যেহেতু এমন একটি ক্রমবিন্যস্ত ত্রয়ী, সমগঠন (বা সদৃশগঠন) চিত্রণ যার অন্যতম উপাদান তাই দ্বিতীয় কোনো চিত্রণের সাহায্যে পরিমাপ করতে পারলেই নির্দিষ্ট এম্পিরিকাল ব্যবস্থাটির পরিমাপের জন্য একটি দ্বিতীয় স্কেল পাওয়া গেল। যে-কোনো পরিমাপের চরিত্র মূলত নির্ভর করছে এই দুটি (বা তারও বেশি) স্কেলের পারস্পরিক সম্পর্কের উপর। কারণ U-র অন্তর্ভুক্ত এম্পিরিকাল ডোমেন A অপরিবর্তিত থাকলেও বিভিন্ন স্কেলে পরিমাপের ফলে A-র পদগুলির সাংখ্যিক মান ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। কাজেই যে-কোনো একটি স্কেলে পরিমাপের ফলে যে-সাংখ্যিক

মান পাওয়া গেল তা কতোদূর পর্যন্ত অনন্য তা না জানতে পারলে পরিমাপের পূর্ণ চরিত্র জানা হ'ল না।

পরিমাপের একত্ব বিচার করতে গেলে বিভিন্ন রকমের রূপান্তরের সংগে পরিচয় থাকা প্রয়োজন।

সংজ্ঞা 2·6

সদৃশ রূপান্তরঃ— মনে করা যাক ϕ অপেক্ষকের ডোমেন ও রেঞ্জ দুইই হ'ল প্রকৃত সংখ্যাগোষ্ঠী। এমন কোনো ধনাত্মক প্রকৃত সংখ্যা α যদি থাকে যে প্রত্যেকটি প্রকৃত সংখ্যা x-এর জন্য $\phi(x) = \alpha\, x, \ \ldots \quad (2\cdot1)$ তাহলে ϕ-কে বলা হয় **সদৃশ রূপান্তর।**

সদৃশ রূপান্তরের সাহায্যে আনুপাতিক স্কেলের ধারণাটির পরিষ্কার ব্যাখ্যা দেওয়া যায়।

সংজ্ঞা 2·7

আনুপাতিক স্কেলঃ— মনে করা যাক $< U, N, f >$ একটি স্কেল এবং g এমন একটি অপেক্ষক (বা চিত্রণ) যে $< U, N, g >$-ও একটি স্কেল। এখন g যদি f-এর একটি সদৃশ রূপান্তর হয় তাহলে $< U, N, f >$-কে বলা হবে **আনুপাতিক স্কেল।** অর্থাৎ $g(a) = \phi(f(a))$, $a \varepsilon A$। এখানে ϕ একটি সদৃশ রূপান্তর।

এই সংজ্ঞা থেকে দেখা যাচ্ছে যে U সম্পর্কগত ব্যবস্থার ডোমেন সেটের যে কোনো পদ a-র সাংখ্যিক মান হিসেবে আমরা $f(a)$ বা $g(a)$ দুইই পেতে পারি। কোনটা পাব তা নির্ভর করছে U-কে কোন স্কেলে পরিমাপ করা হচ্ছে তার উপর। লক্ষণীয় যে যে-স্কেলেই পরিমাপ করা হোক না কেন দুটি সাংখ্যিক মানের অনুপাত অপরিবর্তিতঃ $g(a)/f(a) = \alpha$। এই কারণে বলা হয় যে স্কেল দুটির সম্পর্ক আনুপাতিক।

যে-কোনো স্কেলের সংশ্লিষ্ট ϕ-রূপান্তরকে বলা হয় স্কেলটির **গ্রাহ্য রূপান্তর।** ϕ-রূপান্তরের সাহায্যে আমরা এক স্কেল থেকে অন্য স্কেলে চলে যেতে পারি। প্রদত্ত এম্পিরিকাল সম্পর্কগত ব্যবস্থার ডোমেন সেটের যে-কোনো পদের সাংখ্যিক মান একবার যদি পাওয়া যায়, তাহলে অন্য আর কোন কোন সংখ্যার সাহায্যে ঐ পদটিকে চিহ্নিত করা যাবে তা ϕ-রূপান্তর থেকে জানা যাবে। এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে এম্পিরিকাল ব্যবস্থার যে-কোনো দুটি পদকে যখন বিভিন্ন স্কেলে বিভিন্ন সংখ্যায় প্রকাশ করা হচ্ছে তখন তাদের মধ্যেকার এম্পিরিকাল সম্পর্কে কিন্তু কোনো

পরিবর্তন হচ্ছে না। অর্থাৎ, প্রদত্ত এম্পিরিকাল সম্পর্ককে আমরা কতো রকম ভাবে সংখ্যায় প্রকাশ করতে পারি তা যে-কোনো স্কেলের গ্রাহ্য রূপান্তর থেকে জানা যায়। গ্রাহ্য রূপান্তরের বৈশিষ্ট্য সব জানতে গেলে পরিমেয় সম্পর্কগত ব্যবস্থার সম্ভাব্য স্কেলগুলি সব জানতে হবে। একটু অন্য-ভাবে বলতে গেলে, সম্ভাব্য স্কেলগুলি গ্রাহ্য রূপান্তরের বৈশিষ্ট্য দিয়ে সীমাবদ্ধ।

যে-কোনো বস্তুকে যখন আনুপাতিক স্কেলে পরিমাপ করা হয় তখন আমরা বলতে পারি যে বস্তুটির পরিমাপ **সদৃশ রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য**।

সংজ্ঞা 2·8

ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তরঃ— ϕ-রূপান্তরটি যদি এমন হয় যে

$$\phi(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha>0,\ \beta \gtreqless 0, \qquad \ldots.(2\cdot2)$$

তাহলে ϕ-কে বলা হয় **ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর**।

স্পষ্টত, সদৃশ রূপান্তর একটি ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর। $(2\cdot2)$-এ $\beta=0$ নিলেই আমরা সদৃশ রূপান্তর পেয়ে যাই। বস্তুত, সদৃশ রূপান্তর একটি সমমাত্রিক ঋজুরৈখিক রূপান্তর।

সংজ্ঞা 2·9

ব্যবধান স্কেলঃ গ্রাহ্য রূপান্তর যখন ধনাত্মক ঋজুরৈখিক তখন স্কেলটিকে বলা হয় **ব্যবধান স্কেল**। কোনো বস্তুকে যদি ব্যবধান স্কেলে পরিমাপ করা হয় তাহলে আমরা বলতে পারি যে বস্তুটির পরিমাপ **ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য**।

সংজ্ঞা 2·10

চলন রূপান্তরঃ— ϕ-রূপান্তরটিকে বলা হয় **চলন রূপান্তর** যদি

$$\phi(x)=x+\beta \qquad \ldots.(2\cdot3)$$

সংজ্ঞা 2·11

অন্তর স্কেলঃ— চলন রূপান্তর যে-স্কেলের গ্রাহ্য রূপান্তর সেই স্কেলকে বলে অন্তর স্কেল।

অন্তর স্কেলে পরিমাপকে **যোজ্য ধ্রুবক পর্যন্ত অনন্য** বলা হয়।

সংজ্ঞা 2·12

একমুখী রূপান্তরঃ— ϕ-কে **একমুখী রূপান্তর** বলা হয় যদি ϕএর-ডোমেনে সব x, y-এর জন্য

$$\phi(x)<\phi(y)\leftrightarrow x \gtrless y \qquad \ldots .(2{\cdot}4)$$

(2·4)-এ যদি '<' চিহ্ন প্রযোজ্য হয় তাহলে ϕ-কে বলা হয় **বর্ধিষ্ণু একমুখী রূপান্তর**; আর '>' চিহ্ন প্রযোজ্য হলে ϕ-কে বলা হয় **হ্রস্বমান একমুখী রূপান্তর।**

(2·4) থেকে বুঝতে পারা যাচ্ছে যে বর্ধিষ্ণু একমুখী রূপান্তরের প্রথম ডেরিভেটিভ্ ধনাত্মক হবে, অর্থাৎ, $\phi'(x)>0$; এবং হ্রস্বমান একমুখী রূপান্তরের প্রথম ডেরিভেটিভ্ ঋণাত্মক হবে, অর্থাৎ, $\phi'(x)<0$।

সংজ্ঞা 2·13

পূরণবাচক স্কেলঃ— যে-স্কেলের গ্রাহ্য রূপান্তর একমুখী সেই স্কেলকে বলা হয় **পূরণবাচক স্কেল।** পূরণবাচক স্কেলের পরিমাপকে **একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য** বলা হয়।

সংজ্ঞা 2·14

বর্ধিষ্ণু অতি-একমুখী রূপান্তরঃ— কোনো বর্ধিষ্ণু একমুখী রূপান্তর ϕ যদি এমন হয় যে ϕ-এর ডোমেনের সব x, y, u, v-এর জন্য

$$(x-y)<(u-v)\leftrightarrow\{\phi(x)-\phi(y)\}<\{\phi(u)-\phi(v)\} \quad \ldots(2{\cdot}5)$$

তাহলে ϕ-কে বলা হয় **বর্ধিষ্ণু অতি-একমুখী রূপান্তর।**

সংজ্ঞা 2·15

অতি-পূরণবাচক স্কেলঃ— সংশ্লিষ্ট গ্রাহ্য রূপান্তর অতি-একমুখী (বর্ধিষ্ণু বা হ্রস্বমান) হ'লে স্কেলটিকে বলা হয় **অতি-পূরণবাচক স্কেল।** অতি-পূরণবাচক স্কেলে পরিমাপকে **অতি-একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য** বলা হয়।

লক্ষণীয় যে, যে-পরিমাপ ঋজুরৈখিক রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য তা অবশ্যই অতি-একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য। কারণ, রূপান্তরটি ঋজুরৈখিক হ'লে তা অতি-একমুখীও বটে। সহজেই দেখা যায় যে এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা সত্য নয়।

প্রধান স্কেল ও সংশ্লিষ্ট গ্রাহ্য রূপান্তরগুলি নিচের তালিকায় সাজিয়ে দেওয়া হ'লঃ

স্কেল	গ্রাহ্য রূপান্তর
1. আনুপাতিক	1. সদৃশ
2. ব্যবধান	2. ধনাত্মক ঋজুরৈখিক
3. অন্তর	3. চলন
4. পূরণবাচক	4. একমুখী
5. অতি-পূরণবাচক	5. অতি-একমুখী

3. উপযোগের পরিমাপঃ অঙ্কবাচক ও পূরণবাচক

উপযোগ এই ধারণাটিকে অর্থনীতিতে নানা প্রসঙ্গে ব্যবহার করা হয়ে থাকে। মার্শালের আংশিক সাম্যাবস্থার দৃষ্টিকোণ থেকে ভোক্তার চাহিদা সংক্রান্ত আচরণ বিশ্লেষণে এর প্রয়োগ আমরা আগে পেয়েছি: সাধারণ সাম্যাবস্থার দৃষ্টিকোণ থেকেও ভোক্তার চাহিদার বিশ্লেষণে উপযোগের প্রয়োগ করা হয়। এই প্রয়োগ আমরা পরে আলোচনা করব' এই দু'রকমের প্রয়োগেই উপযোগ পরিমাপের প্রয়োজন পড়ে। তবে বিভিন্ন প্রয়োগ ক্ষেত্রে উপযোগকে যে একই অর্থে পরিমাপযোগ্য বলে মনে করা হয় তা নয়। যেমন, সাধারণত বলা হয়ে থাকে আংশিক সাম্যাবস্থায় উপযোগের পরিমাপ অঙ্কবাচক; কিন্তু সাধারণ সাম্যাবস্থায় পূরণবাচক উপযোগের ভিত্তিতেও আমরা ভোক্তার সাম্যাবস্থা এবং তার চাহিদা রেখার প্রয়োজনীয় গুণাবলি সবই পেতে পারি। উপযোগের পরিমাপ প্রসঙ্গে অঙ্কবাচক ও পূরণবাচক এই ধারণা দুটিকে স্পষ্ট করা আমাদের বর্তমান আলোচনার উদ্দেশ্য।

সুপেস্‌ ও জিন্‌স্‌-এর পরিমাপ তত্ত্ব থেকে আমরা এটুকু বুঝতে পেরেছি যে যে-কোনো বস্তু কি অর্থে পরিমাপযোগ্য তা জানতে গেলে ঐ বস্তুটির পরিমাপের সম্ভাব্য স্কেল বা যে-কোনো একটি স্কেলের গ্রাহ্য রূপান্তর স্পষ্ট জানা প্রয়োজন। পূরণবাচক উপযোগ বলতে কি বোঝায়? অথবা, উপযোগ পূরণবাচক অর্থে পরিমাপযোগ্য এ-কথার অর্থ কি? এই প্রশ্নের উত্তর এখন সহজে দেওয়া সম্ভব। পূরণবাচক উপযোগ বলতে বোঝায় যে উপযোগের পরিমাপ একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য। যে-কোনো দ্রব্যের বা দ্রব্যসমষ্টির থেকে প্রাপ্য যে-উপযোগ তার প্রতিরূপায়ণের

জন্য এমন একটি অপেক্ষক প্রয়োজন যে ঐ অপেক্ষক অনুসারে অধিকতর উপযোগ বিশিষ্ট দ্রব্যের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট হবে উচ্চতর সাংখ্যিক মান। মনে করা যাক x একটি দ্রব্য বা দ্রব্যসমষ্টি। U হ'ল প্রতিরূপায়ণের জন্য প্রয়োজনীয় অপেক্ষক—U-কে বলা হয় **উপযোগ অপেক্ষক**। U উপযোগ অপেক্ষক ব'লে x-এর উপযোগ y-এর উপযোগ থেকে বেশি হলেই $U(x) > U(y)$। এম্পিরিকাল ডোমেনে উপযোগগুলির (অর্থাৎ বিভিন্ন দ্রব্যের থেকে প্রাপ্য উপযোগের) যে-সম্পর্ক তা এই U-অপেক্ষকের প্রয়োগে প্রাপ্য সাংখ্যিক মানের মধ্যে বজায় আছে। মনে করা যাক F হ'ল U-এর কোনো একমুখী রূপান্তর। U-এর বদলে F-কে যদি উপযোগ অপেক্ষক হিসেবে ব্যবহার করা হয় তাহলে এম্পিরিকাল ডোমেনের দুটি উপযোগের যেটি অধিকতর তার F-মানও হবে বৃহত্তর। এই কারণে দুটি উপযোগের পারস্পরিক ক্রম-সম্পর্ক নির্দেশ করতে গেলে পরিমাপের স্কেল একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হলেই চলে। এই ধরনের স্কেলকে বলে পূরণবাচক স্কেল। লক্ষণীয় যে, F যদি U-এর একমুখী রূপান্তর না হয় তাহলে এম্পিরিকাল ডোমেনের উপযোগগুলির মধ্যে যে ক্রম সম্পর্ক আছে তা পরিমাপের সাংখ্যিক মানে যথাযথ ধরা পড়ে না। এম্পি-রিকাল ক্রম সম্পর্ক অব্যাহত রাখতে গেলে পরিমাপ একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হওয়া প্রয়োজন। পক্ষান্তরে, পরিমাপ একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হলে এম্পিরিকাল ডোমেনের ক্রম-সম্পর্ক যথাযথ বজায় থাকে। অতএব, একমুখী রূপান্তর ক্রম-সম্পর্ক নির্দেশ করার জন্য প্রয়োজনীয় ও উপযুক্ত শর্ত।

অংকবাচক পরিমাপের ধারণাটি তুলনায় একটু বেশি অসুবিধাজনক। কারণ, অংকবাচক পরিমাপ বলতে ঠিক নির্দিষ্ট এক রকম পরিমাপকে বোঝায় না। অন্তত দু'রকম পরিমাপকে অংকবাচক পরিমাপ হিসেবে গণ্য করা যেতে পারে। এর একটি হ'ল পরিমাপ যেখানে সদৃশ রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য এবং অন্যটি হ'ল পরিমাপ যেখানে ঋজুরৈখিক রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য। অর্থাৎ, আনুপাতিক স্কেল এবং ব্যবধান স্কেল এই দুইয়ের পরিমাপকেই অংকবাচক পরিমাপ বলে।

কোনো নির্দিষ্ট প্রসঙ্গে যখন উপযোগকে অঙ্কবাচক অর্থে পরিমেয় ব'লে গ্রহণ করা হয় তখন সম্ভাব্য দুই অর্থের কোন অর্থে তা গ্রহণ করতে হবে সেটা নির্ভর করছে ঐ প্রসঙ্গের প্রয়োজনের উপর। উদাহরণ হিসেবে পূর্ব পরিচ্ছেদে আলোচিত মার্শালীয় চাহিদা তত্ত্বের প্রসঙ্গটি নেওয়া যেতে পারে। সাধারণভাবে বলা হয়ে থাকে যে মার্শালীয় তত্ত্বে উপযোগের

পরিমাপ অংকবাচক হওয়া প্রয়োজনীয়। কেন? উপযোগ অংকবাচক না হ'লে প্রান্তিক উপযোগের কোনো মানে থাকে না। কারণ, পূরণবাচক উপযোগে শুধুমাত্র দুটি উপযোগের মধ্যে ক্রম-সম্পর্কের তুলনা সম্ভব, দুই উপযোগের অন্তর কতো, অথবা, যে-কোনো উপযোগ যুগ্মের অন্তর অন্য আর একটি উপযোগ যুগ্মের অন্তরের তুলনায় ছোট না বড় তা নির্ধারণ করা চলে না। অথচ, উপযোগ যুগ্মের অন্তর তুলনা করতে না পারলে ক্রম হ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগের সূত্র গ্রহণ করা চলে না। এই কারণে আমরা বলতে পারি যে ক্রম হ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগ সূত্রের প্রয়োজনে উপযোগ ব্যবধান স্কেলে পরিমাপযোগ্য হওয়া প্রয়োজন। অর্থাৎ, এই প্রয়োজনের জন্য উপযোগের পরিমাপ ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হওয়া দরকার। $U(x)$ যদি x-এর একটি উপযোগ মান হয় তাহলে $F[U(x)]$-ও x-এর আর একটি গ্রাহ্য উপযোগ মান হবে, যদি

$F = \alpha U + \beta (\alpha > 0)$ হয়।

রূপান্তরটি ধনাত্মক ঋজুরৈখিক হ'লে যে উপযোগ যুগ্মের অন্তরগুলির ক্রম-সম্পর্ক বজায় থাকে তা সহজে দেখানো যায়। মনে করা যাক x_1, x_2, x_3 এম্পিরিকাল ডোমেনের তিনটি উপযোগ। U-স্কেলে এদের উপযোগ মান যথাক্রমে $U(x_1)$, $U(x_2)$ এবং $U(x_3)$। $F=\alpha U+\beta(\alpha>0)$ U-এর একটি ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর। F-স্কেলে x_1, x_2, x_3-এর মান যথাক্রমে

$$\left.\begin{aligned} F(x_1) &= \alpha U(x_1)+\beta \\ F(x_2) &= \alpha U(x_2)+\beta \\ F(x_3) &= \alpha U(x_3)+\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(3\cdot1)$$

অতএব,

$$\left.\begin{aligned} & F(x_1)-F(x_2)=\alpha\,[U(x_1)-U(x_2)] \\ & \text{এবং} \\ & F(x_2)-F(x_3)=\alpha\,[U(x_2)-U(x_3)] \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(3\cdot2)$$

স্পষ্টত আমরা পাচ্ছি যে

$$\left.\begin{aligned} & F(x_1)-F(x_2)>F(x_2)-F(x_3) \\ & \text{যদি এবং একমাত্র যদি} \\ & U(x_1)-U(x_2)>U(x_2)-U(x_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots.(3\cdot3)$$

একই ভাবে দেখানো যায় যে উপযোগ অপেক্ষক যদি চলন রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হয় তাহলেও উপযোগ যুগ্মের অন্তরের ক্রম-সম্পর্ক সংরক্ষিত হয়। কাজেই, ক্রম-হ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগের সূত্র প্রসঙ্গে উপযোগ ব্যবধান বা অন্তর যে-কোনো স্কেলে পরিমাপযোগ্য ব'লে গ্রহণ করা চলে। বস্তুত, ব্যবধান স্কেলের জন্য $\alpha U + \beta$ এই রূপান্তরে $\alpha = 1$ বসালেই আমরা চলন রূপান্তর পেয়ে যাই।

মার্শালীয় তত্ত্বের প্রসঙ্গে আমরা উপযোগের যোগসম্ভাব্যতার ধারণাও পেয়েছি। উপযোগ যোগসম্ভব হতে গেলে তা কোন অর্থে পরিমাপযোগ্য হওয়া প্রয়োজন? উপযোগের পরিমাপ যদি ব্যবধান স্কেলে করা হয় তাহলে দুটি উপযোগের সাংখ্যিক মানের যোগফলের কোনো মানে থাকে না। বস্তুত, উপযোগ অন্তর স্কেলে পরিমাপ করা হলেও একই অসুবিধা দেখা দেয়। দুটি উপযোগ যোগ করতে গেলে উপযোগ আনুপাতিক স্কেলে পরিমাপযোগ্য হওয়া প্রয়োজন।

মনে করা যাক x_1 এবং x_2 এম্পিরিকাল ডোমেনের দুটি উপযোগ। U-স্কেলে[1] এদের সাংখ্যিক মান যথাক্রমে $U(x_1)$ এবং $U(x_2)$। F যদি U-এর একটি ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর হয় তাহলে F-স্কেলে x_1 এবং x_2-এর মান যথাক্রমে

$$\left.\begin{aligned} F(x_1) &= F[U(x_1)] = \alpha U(x_1) + \beta \\ \text{এবং} \quad F(x_2) &= F[U(x_2)] = \alpha\, U(x_2) + \beta \end{aligned}\right\} \qquad \ldots.(3 \cdot 4)$$

অর্থাৎ F-স্কেলে উপযোগ দুটির সাংখ্যিক মানের যোগফল

$$F(x_1) + F(x_2) = \alpha\, [U(x_1) + U(x_2)] + 2\beta। \qquad \ldots.(3 \cdot 5)$$

কিন্তু U-স্কেলে প্রাপ্য সাংখ্যিক মান দুটিকে যোগ ক'রে F-স্কেলে রূপান্তরিত করলে আমরা পাই

$$F[U(x_1) + U(x_2)] = \alpha[U(x_1) + U(x_2)] + \beta। \qquad \ldots(3 \cdot 6)$$

$(3 \cdot 5)$ এবং $(3 \cdot 6)$ থেকে প্রাপ্য সাংখ্যিক মান আলাদা।

[1] স্পষ্টতই শুধু U কোনো স্কেল নয়; তবে আলোচ্য প্রসঙ্গে যেহেতু আমাদের এম্পিরিকাল ডোমেন এবং সাংখ্যিক ডোমেন নির্দিষ্ট আছে তাই সংক্ষেপে U-কেই স্কেলের নির্দেশক হিসেবে বলা হচ্ছে।

উপযোগ অন্তর স্কেলে পরিমাপ করা হ'লেও এই একই অসুবিধা দেখা দেয়। $F(x) = U(x) + \beta$ যদি হয় তাহলে

$$F(x_1) + F(x_2) = U(x_1) + U(x_2) + 2\beta; \qquad \ldots.(3{\cdot}7)$$

কিন্তু

$$F[U(x_1) + U(x_2)] = U(x_1) + U(x_2) + \beta। \qquad \ldots.(3{\cdot}8)$$

সহজেই দেখা যায় যে একমাত্র আনুপাতিক স্কেলের পরিমাপে যোগ-সম্ভাব্যতা অক্ষুণ্ণ থাকে। $F(x) = \alpha\ U(x)$ যদি হয় তাহলে

$$F(x_1) + F(x_2) = \alpha U(x_1) + \alpha U(x_2) \qquad ..(3{\cdot}9)$$

এবং

$$F[U(x_1) + U(x_2)] = \alpha [U(x_1) + U(x_2)]$$
$$= \alpha U(x_1) + \alpha U(x_2) \qquad \ldots.(3{\cdot}10)$$

উপরের আলোচনা থেকে দেখা গেল যে যোগসম্ভব উপযোগের জন্য পরিমাপ সদৃশ রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হওয়া দরকার। যদিও শুধু ক্রম-হ্রস্বমান প্রান্তিক উপযোগ সূত্রের জন্য উপযোগের পরিমাপ ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হ'লেই চলে। মার্শালীয় চাহিদা তত্ত্বে অংকবাচক উপযোগ ব্যবহার করার প্রয়োজন পড়ে একথা ঠিক, তবে কোন প্রসংগে তা কোন অর্থে ব্যবহৃত হচ্ছে সেটা খেয়াল রাখা প্রয়োজন।

4. ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষক ও তার উৎস

ভোক্তার আচরণ বিশ্লেষণে আলোচনার সূত্রপাত বিভিন্ন স্তরে হওয়া সম্ভব। উপরে মার্শালীয় তত্ত্বের আলোচনা প্রসংগে ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিয়ে আলোচনার সূত্রপাত করা হয়েছে। শুধু আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতিতে নয়, সাধারণ সাম্যাবস্থা পদ্ধতিতেও আমরা ঐ একই স্তর থেকে আলোচনার সূত্রপাত করতে পারি। বিশ্লেষণের পদ্ধতি যাই হোক না কেন, আলোচনার সূত্রপাতের স্তর একই হওয়া সম্ভব। উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধ'রে নিয়ে যদি শুরু করা হয় তাহলে স্বভাবতই ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষকের উৎস সম্বন্ধে কিছু জানতে পারা যায় না। সেই উদ্দেশ্যে আমরা ভোক্তার আচরণ বিশ্লেষণ অন্য এক স্তরেও শুরু করতে পারি।

মনে করা যাক সম্ভাব্য সব দ্রব্য সমষ্টির মধ্যে ভোক্তার একটি পছন্দ সম্পর্কের কল্পনা করা হ'ল। এখন প্রশ্ন হ'লঃ ভোক্তার এই পছন্দ সম্পর্কের কি কি গুণ থাকলে তার পছন্দের যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব ? x এবং y যদি দুটি দ্রব্য সমষ্টি হয়, এবং ভোক্তা যদি y-এর চেয়ে x-কে বেশি পছন্দ করে তাহ'লে এই পছন্দ সম্পর্কের যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ বলতে বোঝায় x এবং y-এর এমন দুটি সাংখ্যিক মান যাতে ক'রে x-এর সাংখ্যিক মান y-এর সাংখ্যিক মানের চেয়ে বড় হয়। x এবং y-এর মধ্যে ভোক্তা যদি কোনোটিকে কোনোটির তুলনায় পছন্দ না করে তাহ'লে যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণে x এবং y-এর সাংখ্যিক মান পরস্পর সমান হবে। প্রতিরূপায়ণ প্রতিপাদ্যে দ্রব্যসমষ্টির মধ্যেকার পছন্দ সম্পর্কের এই অর্থে যথাযথ প্রতিরূপায়ণ সম্ভব কিনা, কোন অবস্থায় তা সম্ভব এই সব প্রশ্ন আলোচনা করা হয়।

আলোচ্য প্রসঙ্গে আমাদের এম্পিরিকাল ডোমেনের পদগুলি হ'ল বিভিন্ন দ্রব্য সমষ্টি। এদের মধ্যেকার পছন্দ সম্পর্ক দেওয়া আছে। দ্রব্য সমষ্টি $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ইত্যাদির প্রত্যেক n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেসের এক একটি বিন্দু। অর্থাৎ $x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$ হ'ল n-সংখ্যক দ্রব্যের নির্দিষ্ট পরিমাণ সম্বলিত একটি সংগ্রহ। এই সংগ্রহগুলির মধ্যে ভোক্তার পছন্দের বর্ণনা হিসেবে একটি দ্বিনিধানী সম্পর্ক R দেওয়া আছে। ব্যাখ্যা হিসেবে বলা চলে যে x_1Rx_2 বললে তার অর্থ হবে যে ভোক্তার কাছে x_1 সংগ্রহ x_2-এর তুলনায় ভাল বা তুল্যমূল্য, অন্তত x_2-এর তুলনায় খারাপ নয়। মনে করা যাক R একটি এমন দ্বিনিধানী সম্পর্ক যে

প্রত্যেক i-এর জন্য $x_iRx_i \, (i = 1, \ldots, m)$

(স্ববৃতি) $\ldots (4\cdot1)$

প্রত্যেক i, j-এর জন্য x_iRx_j অথবা $x_j Rx_i \; (i, j = 1, \ldots, m)$

(সম্পূর্ণতা) $\ldots (4\cdot2)$

প্রত্যেক i, j, k-এর জন্য

$$x_iRx_j \;\&\; x_jRx_k \rightarrow x_iRx_k \, (i, j, k = 1, \ldots, m)$$

(সংক্রমিতা) $\ldots (4\cdot3)$

স্ববৃত, সম্পূর্ণ ও সংক্রমী কোনো দ্বিনিধানী সম্পর্ক R-এর যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব কি ? সহজেই দেখানো চলে যে $(4\cdot1) - (4\cdot3)$

এই তিনটি ধর্ম মাত্র থাকলেই সেই দ্বিনিধানী সম্পর্কের সাংখ্যিক প্রতি-রূপায়ণ সম্ভব হয় না। এর উল্লেখযোগ্য উদাহরণ আভিধানিক ক্রমবিন্যাস।

সংজ্ঞা 4·1

আভিধানিক ক্রমবিন্যাস: x_i এবং x_j দ্রব্যসমষ্টি দুটিকে আভিধানিক অর্থে ক্রমবিন্যস্ত $(x_i R_L x_j)$ বলা হয় যদি

$$x_{i1} > x_{j1}$$

অথবা

$$x_{i1} = x_{j1}$$

এবং

$$x_{i2} \geqq x_{j2}$$

অথবা

$$x_{i1} = x_{j1}$$
$$x_{i2} = x_{j2}$$

এবং

$$x_{i3} \geqq x_{j3}$$

. . . .

অথবা

$$x_{i1} = x_{j1}$$
$$x_{i2} = x_{j2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{i,n-1} = x_{j,n-1} \qquad \dots (4\cdot4)$$

এবং

$$x_{in} \geqq x_{jn}$$

কোনো ভোক্তার পক্ষে দ্রব্যসমষ্টি যদি আভিধানিক অর্থে ক্রমবিন্যস্ত হয় তাহলে বুঝতে হবে যে দ্রব্যসমষ্টির অন্তর্গত প্রথম দ্রব্যটির প্রতি ভোক্তার ঝোঁক তুলনায় অনেক বেশি। কারণ, x_i এবং x_j-এর মধ্যে সম্পর্ক স্থাপনের সময়ে সে যদি দেখে যে x_i-এর প্রথম দ্রব্য x_j-এর প্রথম দ্রব্যের তুলনায় বেশি তাহলেই তার কাছে x_i আভিধানিক অর্থে x_j-এর তুলনায় বেশি পছন্দ। x_i-এর অন্তর্গত অন্যান্য দ্রব্যের পরিমাণ x_j-এর অন্তর্গত অন্যান্য দ্রব্যের তুলনায় কম বা বেশি যাই হোক না কেন ভোক্তার পছন্দ শুধুমাত্র প্রথম দ্রব্যের ভিত্তিতেই নির্ধারিত হচ্ছে। তবে প্রথম দ্রব্য যদি দুই দ্রব্যসমষ্টির মধ্যে সমান পরিমাণ হয় তখন পরবর্তী দ্রব্যগুলির তুলনা প্রাসঙ্গিক।

এই প্রসঙ্গে লক্ষণীয় যে $x_i R_L x_j$ এই সম্পর্কের মধ্যে $x_i \neq x_j$ হ'লে x_i-এর অন্তত একটি দ্রব্যের পরিমাণ x_j-র অন্তর্গত সেই দ্রব্যের তুলনায় বেশি।

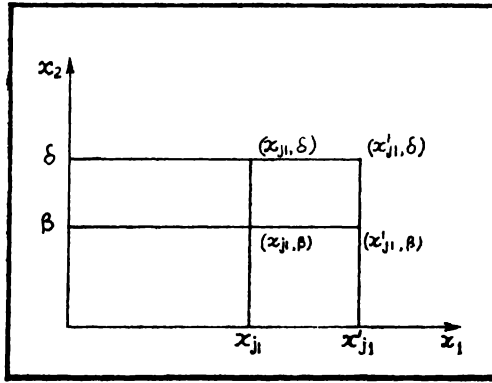
R_L সম্পর্কটি স্ববৃত, সম্পূর্ণ ও সংক্রমী। কিন্তু R_L-এর কোনো যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব নয়। দ্বিমাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেসে এই প্রতিপাদ্যের প্রমাণ নিচে দেওয়া হ'ল।

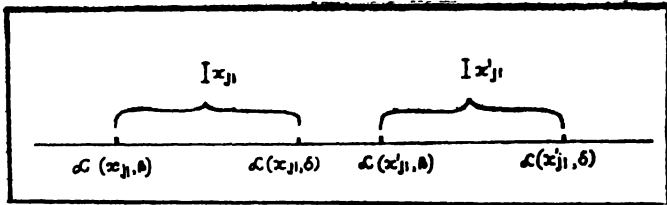
প্রতিপাদ্য 4·1 (দ্যব্র)

আভিধানিক অর্থে ক্রমবিন্যস্ত দ্বিমাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেসের যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব নয়।

প্রমাণঃ আমাদের আলোচ্য স্পেসটি দ্বিমাত্রিক ব'লে প্রত্যেক দ্রব্য-সমষ্টির অন্তর্গত দুটি দ্রব্য আছে। মনে করা যাক x_i এবং x_j এই স্পেসের দুটি ভিন্ন দ্রব্য সমষ্টি। তাহ'লে অন্তত একটি দ্রব্য কোনো একটি সমষ্টিতে বেশি পরিমাণ থাকবে। মনে করা যাক $x_i R_L x_j$। R_L-এর সংজ্ঞা থেকে তাহলে পাওয়া যাচ্ছে যে

$$\left.\begin{array}{ll} & x_{i1} > x_{j1} \\ \text{অথবা} & \\ & x_{i1} = x_{j1} \\ \text{এবং} & \\ & x_{i2} > x_{j2} \end{array}\right\} \qquad \ldots(4\cdot5)$$

মনে করা যাক $\alpha(x_i)$ R_L-এর একটি যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ। β এবং δ এমন দুটি ধ্রুব সংখ্যা নেওয়া হ'ল যে $\beta < \delta$। যে-কোনো একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা x_{j1} যদি দেওয়া থাকে তাহ'লে আমাদের দ্বিমাত্রিক স্পেসে (x_{j1}, β) এবং (x_{j1}, δ) এই দুটি বিন্দু পেতে পারি। α প্রতিরূপায়ণ অনুসারে এই দুটি বিন্দুর সাংখ্যিক মান যথাক্রমে $\alpha(x_{j1}, \beta)$ এবং $\alpha(x_{j1}, \delta)$। স্পষ্টতই, $\alpha(x_{j1}, \beta) < \alpha(x_{j1}, \delta)$, কারণ (x_{j1}, δ) R_L (x_{j1}, β)। $Ix_{j1} = [\alpha(x_{j1}, \beta), \alpha(x_{j1}, \delta)]$ হ'ল প্রকৃত রেখার উপর একটি ব্যবধান। x_{j1}-এর বদলে x'_{j1} যদি আর একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা নেওয়া যায় তাহ'লে একই পদ্ধতিতে আমরা $Ix'_{j1} = [\alpha(x'_{j1}, \beta), \alpha(x'_{j1}, \delta)]$ প্রকৃত রেখার উপর অন্য একটি ব্যবধান পাব।

চিত্র 4.1

যদি $x'_{j1} > x_{j1}$ হয় (চিত্র 4·1-এ যেমন দেখান হয়েছে) তাহ'লে সহজে দেখা যায় যে $Ix_{j1} \cap Ix'_{j1} = \phi$, কারণ $\alpha(x'_{j1}, \beta) > \alpha(x_{j1}, \delta)$ যেহেতু $(x'_{j1}, \beta)\ R_L\ (x'_{j1}, \delta)$। চিত্র 4·1-এর বিন্দুগুলিকে α-প্রতিরূপায়ণ

চিত্র 4.2

করার পরে চিত্র 4.2-এর প্রকৃত রেখার উপরে সাজালে আমরা স্পষ্ট দেখতে পাচ্ছি যে Ix_{j1} এবং Ix'_{j1}-এর মধ্যে কোনো সামান্য মান নেই। অতএব ব্যবধান দুটি বিচ্ছিন্ন। লক্ষণীয় যে x_{j1}, x'_{j1} ইত্যাদি এক একটি নির্দিষ্ট প্রকৃত সংখ্যা নিলেই আমরা এক একটি সংশ্লিষ্ট ব্যবধান Ix_{j1}, Ix'_{j1} ইত্যাদি পাচ্ছি। এটা সম্ভব নয়, কারণ, আমাদের জানা আছে যে প্রকৃত সংখ্যার সেট একটি অগণনীয় সেট[1] এবং অশূন্য বিচ্ছিন্ন ব্যবধানগুলির সেট একটি

[1] প্রকৃত সংখ্যার সেটের অগণনীয়তার প্রমাণের জন্য দ্রঃ W. Rudin—*Principles of Mathematical Analysis* অথবা তুল্যমানের অন্যান্য গাণিতিক বিশ্লেষণ বা টপোলজির বই।

গণনীয় সেট। অতএব এই সেট দুটি পরস্পর সংশ্লিষ্ট হওয়া সম্ভব না। এই বিরোধাভাসই আমাদের প্রতিপাদ্যের প্রমাণ। [QED]

উপরের প্রতিপাদ্য থেকে আমরা পাচ্ছি যে শুধুমাত্র স্ববৃত, সম্পূর্ণ ও সংক্রমী হ'লেই কোনো দ্বিনিধানী সম্পর্কের সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব নয়। দ্যব্র[1] প্রমাণ করেছেন যে আলোচ্য দ্বিনিধানী সম্পর্কটির যদি স্ববৃতি, সম্পূর্ণতা ও সংক্রমিতা ছাড়াও নিরবচ্ছিন্নতার ধর্ম থাকে তাহলে যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব। দ্যব্র তাঁর প্রতিপাদ্যের জন্য যে-সব শর্ত ব্যবহার করেছিলেন পরবর্তী কালে তার তুলনায় কিঞ্চিৎ দুর্বলতর শর্ত ব্যবহার করেও সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ প্রমাণ করা সম্ভব হয়েছে। 1963 সালে ট্রাউট্ রেডার[2] এরকম একটি প্রতিপাদ্য প্রমাণ করেছেন। আমরা রেডারের প্রমাণের ভিত্তিতে নিচের প্রতিপাদ্যটি উপস্থিত করব। কিন্তু তার আগে পছন্দ সম্পর্কের নিরবচ্ছিন্নতার ধারণা আলোচনা করা দরকার।

মনে করা যাক R একটি দ্বিনিধানী পছন্দ সম্পর্ক। x, y ইত্যাদি দ্বিমাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেসের দ্রব্যসমষ্টি। আমাদের বর্তমান আলোচনা n-মাত্রিক স্পেসের বেলাতেও সমানভাবে প্রযোজ্য। ধরা যাক xRy। এক্ষেত্রে R-সম্পর্কটি নিরবচ্ছিন্ন বললে বোঝায় যে x এবং x' যদি 'কাছাকাছি' দুটি দ্রব্যসমষ্টি হয় তাহলে $x'Ry$। দুটি দ্রব্যসমষ্টি কাছাকাছি বলতে কি বোঝায়? x এবং x'-এর অন্তর্গত দ্রব্য দুটির পরিমাণ যদি পরস্পর খুব কাছাকাছি হয় তাহলে দ্রব্যসমষ্টি দুটিকে কাছাকাছি বলা হয়। অর্থাৎ, x' যদি x-এর কাছাকাছি একটি দ্রব্যসমষ্টি হয় তাহলে x'-এর অন্তর্গত প্রথম দ্রব্যের পরিমাণ এবং x-এর অন্তর্গত প্রথম দ্রব্যের পরিমাণের তফাত অতি সামান্য। তেমনি দ্বিতীয় দ্রব্যের বেলাতেও

[1] G. Debreu—*Theory of value* [*Cowles Commission Monograph*].

[2] T. Rader—"Existence of a utility function to represent preferences" [*Review of Economic Studies.* Vol. XXX(3).

J. Quirk & R. *Saposnik* — *Introduction to General Equilibrium and Welfare Economics*-এর 18 পৃষ্ঠার পাদটীকায় মন্তব্য করা হয়েছে যে রেডারের প্রতিপাদ্যে সংক্রমিতার শর্তটিকে পরিবর্তন করা হয়েছে। তা কিন্তু ঠিক নয়। রেডারের প্রমাণে নিরবচ্ছিন্নতার শর্তটিকে পরিবর্তন ক'রে ঈষৎ দুর্বল রূপে তাকে ব্যবহার করা হয়েছে।

দুটি সমষ্টির অন্তর্গত পরিমাণের তফাত অতি সামান্য। একথা নিশ্চয়ই ঠিক যে 'কাছাকাছি', 'অতি সামান্য' ইত্যাদি ধারণাগুলি অস্পষ্ট। তাই নিরবচ্ছিন্নতার ধারণা স্পষ্টতর করার জন্য বদ্ধ সেটের ধারণা ব্যবহার করা হয়।

সংজ্ঞা 4·2

পরিণাম বিন্দু: মনে করা যাক E একটি ইউক্লিডীয় স্পেস। $p \varepsilon E$-কে E-এর একটি **পরিণাম বিন্দু** বলা হয় যদি p-কে কেন্দ্র ক'রে অংকিত যে-কোনো বৃত্তের মধ্যে এমন একটি বিন্দু $q \neq p$ থাকে যে $q \varepsilon E$।

সংজ্ঞা 4·3

বদ্ধ সেট: মনে করা যাক S E-এর একটি উপসেট। S-কে একটি **বদ্ধ সেট** বলা হয় যদি S-এর প্রত্যেকটি পরিণাম বিন্দু S-এর অন্তর্ভুক্ত হয়।

সংজ্ঞা 4·4

নিরবচ্ছিন্ন পছন্দ সম্পর্ক: মনে করা যাক X একটি দ্রব্যসমষ্টির স্পেস এবং R সেই স্পেসে সংজ্ঞায়িত একটি দ্বিনিধানী পছন্দ সম্পর্ক। R-কে নিরবচ্ছিন্ন বলা হয় যদি প্রত্যেক $x \varepsilon X$-এর জন্য

$$\{ y \mid y \varepsilon X \text{ এবং } y R x \} \qquad \ldots\ldots(4·6)$$

এবং

$$\{ y \mid y \varepsilon x \text{ এবং } x R y \} \qquad \ldots\ldots(4·7)$$

সেট দুটি বদ্ধ সেট হয়।

সংজ্ঞা 4·4 থেকে আমরা পাচ্ছি যে যে-কোনো নির্দিষ্ট দ্রব্যসমষ্টি x-এর তুলনায় যে-সমস্ত দ্রব্যসমষ্টি ভোক্তার কাছে কম পছন্দ নয় (4·6) এবং যে-সমস্ত দ্রব্যসমষ্টির তুলনায় x কম পছন্দ নয় (4·7) এই দুটি সেটই বদ্ধ সেট। সংজ্ঞা (4·3)-এর সাহায্যে (4·6)-এর অর্থ দাঁড়ায় এই যে x^q যদি সম্ভাব্য দ্রব্যসমষ্টির এমন একটি ক্রম হয় যে প্রত্যেক q-এর জন্য $x^q R x$ এবং $x^q \rightarrow x^o$, তাহলে $x^o R x$; কারণ, (4·6)-এর সেটটি বদ্ধ সেট বলে x^o সেটটির অন্তর্ভুক্ত। অর্থাৎ, x^q-এর সঙ্গে x-এর যে-সম্পর্ক. x^q-এর 'কাছাকাছি' x^o-এর সঙ্গেও x-এর সেই সম্পর্ক বজায় থাকছে। পছন্দ সম্পর্কের নিরবচ্ছিন্নতার এটাই মূল কথা। এই একই ব্যাখ্যা (4·7)-এর সেট সম্বন্ধেও প্রযোজ্য।

সংজ্ঞা (4·4)-এ নিরবচ্ছিন্ন পছন্দ সম্পর্কের যে-ধারণা বর্ণনা করা

হয়েছে দ্যব্র সেই ধারণার ভিত্তিতে তাঁর প্রতিরূপায়ণ প্রতিপাদ্য প্রমাণ করেছেন। রেডার কিন্তু নিরবচ্ছিন্নতার ধারণাটিকে আরো একটু শিথিল ভাবে গ্রহণ করেছেন। রেডারের প্রতিপাদ্যে শুধুমাত্র (4·6)-এর সেটটিকে বদ্ধ সেট হিসেবে ধরা হয়েছে। তাঁর প্রতিপাদ্য প্রমাণের জন্য রেডার ইউক্লিডীয় স্পেসের একটি বিশেষ ধর্ম ব্যবহার করেছেন। প্রত্যেক n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেসের অন্তত একটি গণনীয় ভিত্তি আছে। যে-কোনো সেট X-এর **ভিত্তি** বলতে বোঝায় X-এর উন্মুক্ত উপসেটের এমন একটি সেট যে X-এর যে-কোনো উন্মুক্ত সেটকে ঐ উপসেটগুলির (সবগুলির বা কতকগুলির) সংযুক্তি হিসেবে প্রকাশ করা চলে। ভিত্তির অন্তর্গত উপসেটগুলির সংখ্যা যদি গণনীয় হয় তাহলে ভিত্তিটিকে **গণনীয় ভিত্তি** বলা হয়।

প্রতিপাদ্য 4·2 (রেডার)

মনে করা যাক X একটি n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেস এবং R হ'ল X-এর উপর সংজ্ঞায়িত এমন একটি স্ববৃত, সম্পূর্ণ ও সংক্রমী দ্বিনিধানী সম্পর্ক যে $D_R(x) = \{ y \mid yRx,\ y,\ x\varepsilon X \}$ সেটটি প্রত্যেক $x\varepsilon X$-এর জন্য বদ্ধ সেট। তাহলে X-এর উপর প্রকৃত মান সম্পন্ন এমন একটি উপযোগ অপেক্ষক $U(x)$ আছে যে $U(x) \geqq U(x')$ যদি এবং একমাত্র যদি xRx'।

প্রমাণঃ মনে করা যাক $O_n (n = 1, 2, \ldots)$ হ'ল X-এর গণনীয় ভিত্তির অন্তর্গত উপসেট। মনে করা যাক P^{-1} এমন একটি সম্পর্ক যে $yP^{-1}x$ যদি এবং একমাত্র যদি xPy[1]। এখন, প্রতিপাদ্যে বর্ণিত $D_R(x)$-এর অনুরূপ একটি সেট $D_{P-1}(x)$ আমরা নির্মাণ করতে পারি। এই সেটের সংজ্ঞা হ'ল $D_{P-1}(x) = \{ y \mid yP^{-1}x,\ y,\ x \varepsilon X \}$। লক্ষণীয় যে $D_{P-1}(x)$-এর অন্তর্ভুক্ত প্রত্যেকটি দ্রব্যসমষ্টি এমন যে xPy, অর্থাৎ x তাদের প্রত্যেকের তুলনায় স্পষ্ট পছন্দ। অতএব $D_{P-1}(x)$-এর অন্তর্ভুক্ত এমন কোনো দ্রব্যসমষ্টি y নেই যে yRx হতে পারে। তাহলে $D_{P-1}(x)$-এর প্রত্যেক দ্রব্যসমষ্টি $D_R(x)$-এর পূরক সেটের অন্তর্ভুক্ত। অতএব $D_{P-1}(x) \subset \overline{D_R(x)}$। $\overline{D_R(x)}$ $D_R(x)$-এর পূরক সেট। প্রতিপাদ্যের প্রকল্প অনুসারে $D_R(x)$ একটি বদ্ধ সেট; অতএব তার পূরক সেট $\overline{D_R(x)}$ উন্মুক্ত এবং সেই কারণে $D_{P-1}(x)$-ও একটি উন্মুক্ত সেট।

[1] P-এর সংজ্ঞাঃ xPy যদি এবং একমাত্র যদি $(xRy) \& -(yRx)$। P-কে আমরা নাম দিতে পারি স্পষ্ট পছন্দ।

তাহলে

$$D_{P-1}(x) = \cup_n O_n \qquad \ldots\ldots (4\cdot 8)$$

মনে করা যাক

$$N(x) = \{n | O_n \subset D_{P-1}(x),\ n \text{ পূর্ণসংখ্যা}\} \qquad \ldots\ldots (4\cdot 9)$$

এবং

$$U(x) = \sum_{n \in N(x)} (\tfrac{1}{2})^n \text{।} \qquad \ldots\ldots (4\cdot 10)$$

ধরা যাক xRx'। সংজ্ঞা অনুসারে

$$D_{P-1}(x') = \{y | yP^{-1}x'\}$$

অর্থাৎ,

$$D_{P-1}(x') = \{y | x'Py\} \qquad \ldots\ldots (4\cdot 11)$$

আবার একই সংজ্ঞা অনুসারে

$$D_{P-1}(x) = \{y | xPy\} \qquad \ldots\ldots (4\cdot 12)$$

যেহেতু xRx', তাই

$$D_{P-1}(x') \subset D_{P-1}(x) \qquad \ldots\ldots (4\cdot 13)$$

$(4\cdot 9)$ -এর সংজ্ঞা থেকে আমরা পাই

$$N(x') = \{n | O_n \subset D_{P-1}(x')\} \qquad \ldots\ldots (4\cdot 14)$$

অতএব,

$$N(x') \subset N(x) \qquad \ldots\ldots (4\cdot 15)$$

তাহলে,

$$U(x) \geqq U(x') \text{।} \qquad \ldots\ldots (4\cdot 16)$$

পক্ষান্তরে, মনে করা যাক $U(x) \geqq U(x')$। R-সম্পর্কটি সম্পূর্ণ ব'লে xRx' অথবা $x'Rx$। মনে করা যাক $x'Rx$। তাহলে $N(x) \subset N(x')$। অতএব, $U(x)$ এবং $U(x')$ যদি সমান না হয় তাহলে $U(x') > U(x)$, যা আমাদের প্রকল্পের সঙ্গে অসঙ্গতিপূর্ণ।
$(4\cdot 10)$ -এর $U(x)$ আমাদের নির্ণেয় উপযোগ অপেক্ষক। [QED]

উপরের আলোচনা থেকে দেখা গেল যে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ক যদি নিরবচ্ছিন্ন না হয় তাহলে ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব প্রমাণ করা সম্ভব হয় না। আভিধানিক ক্রমবিন্যাস এই প্রসঙ্গে এক উল্লেখযোগ্য

উদাহরণ। স্ববৃতি, সম্পূর্ণতা ও সংক্রমিতা ইত্যাদি ধর্মগুলি বজায় থাকা সত্ত্বেও ঐ ধরনের পছন্দ সম্পর্কের প্রতিরূপায়ণ সম্ভব নয়। কারণ আভিধানিক ক্রমবিন্যাস নিরবচ্ছিন্ন নয়। প্রতিরূপায়ণের সঙ্গে নিরবচ্ছিন্নতার সম্পর্ক নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয় দ্যব্র প্রতিপাদ্যে। রেডারের প্রতিপাদ্য তারই ঈষৎ পরিবর্তিত রূপ। রেডারের প্রতিপাদ্যের অন্যতম সুবিধা এই যে এখানকার শর্তগুলি কিঞ্চিৎ শিথিল। নিওক্ল্যাসিকাল চাহিদা তত্ত্বে যে-উপযোগ অপেক্ষক ব্যবহার করা হয় তার ভিত্তি হিসেবে কোন ধরনের পছন্দ সম্পর্কের কল্পনা করা প্রয়োজন এই প্রতিপাদ্যে তার স্পষ্ট ধারণা পাওয়া গেল।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ

ভোক্তার আচরণঃ সাধারণ সাম্যাবস্থা পদ্ধতি

ভোক্তা তার নির্দিষ্ট আর্থিক আয় নির্দিষ্ট মূল্যের দ্রব্যাদির মধ্যে কি-ভাবে বণ্টন করে এ প্রশ্নের একটি বিশ্লেষণ আমরা দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে আলোচনা করেছি। আংশিক সাম্যাবস্থা পদ্ধতির ঐ আলোচনায় এক সঙ্গে কেবলমাত্র একটি দ্রব্যের চাহিদা নির্ধারণ করা হয়েছে। সাধারণ সাম্যাবস্থা পদ্ধতি অনুসারে এই একই প্রশ্নের বিশ্লেষণ আমাদের বর্তমান পরিচ্ছেদের আলোচ্য। সাধারণ সাম্যাবস্থায় ভোক্তা যে-সব দ্রব্যের মধ্যে তার আয় বণ্টন করে তার সবগুলির চাহিদা একসঙ্গে নির্ধারণ করা হয়। এই কারণে দ্রব্যাদির মধ্যেকার পরস্পর সম্পর্কহীনতার ধারণা এখানে ব্যবহার করার প্রয়োজন পড়ে না। দ্রব্যাদির মধ্যে পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার সম্পর্ক থাকতে পারে—এবং কোন কোন দ্রব্যযুগ্মের মধ্যে নির্ভরতার সম্পর্ক কেমন তাও আমাদের বিশ্লেষণের মধ্য থেকে বেরিয়ে আসবে। বস্তুত, এই বিশ্লেষণের সাহায্যে পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার ধারণা দুটির স্পষ্ট সংজ্ঞা নির্দেশ করা সম্ভব।

1. ভোক্তার স্থিতাবস্থা

আগের মতোই মনে করা যাক M হ'ল ভোক্তার নির্দিষ্ট আয় এবং $p_1, \ldots, p_n$ হ'ল দ্রব্যাদির নির্দিষ্ট মূল্য। দ্রব্যাদির মধ্যে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ক দেওয়া আছে। এই পছন্দ সম্পর্ক এমন একটি দ্বিনিধানী সম্পর্ক যে তার সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব। অর্থাৎ, আমরা ধ'রে নিচ্ছি যে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ক একটি স্ববৃত, সম্পূর্ণ, সংক্রমী ও নিরবচ্ছিন্ন দ্বিনিধানী সম্পর্ক। লক্ষণীয় যে এ পর্যন্ত ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের উপর উত্তলতার কোনো শর্ত আরোপ করা হয় নি। ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব উত্তলতার উপর নির্ভর করে না। যদিও আমরা আলোচনা প্রসঙ্গে দেখব যে সাম্যাবস্থার প্রয়োজনে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতার ধারণারও দরকার পড়ে।

বিভিন্ন দ্রব্যের পরিমাণ যদি n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেসে প্রকাশ করা হয় তাহলে ঐ স্পেসের এক একটি বিন্দু (অর্থাৎ n-মাত্রিক ভেক্টর) এক একটি দ্রব্যসমষ্টির নির্দেশক। সমগ্র স্পেসটিকে তখন বলা যায় দ্রব্য-

সমষ্টি স্পেস। মনে করা যাক এই দ্রব্যসমষ্টি স্পেসের উপর ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষক দেওয়া আছেঃ

$$U = U(x)$$
$$= U(x_1, \ldots\ldots, x_n) \quad \ldots\ldots(1 \cdot 1)$$

এখানে $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দ্রব্যসমষ্টি স্পেসের একটি বিন্দু। U হ'ল ঐ বিন্দুর একটি সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ। এই প্রতি-রূপায়ণ একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য ব'লে ধ'রে নেওয়া হচ্ছে। অর্থাৎ, x-এর সাংখ্যিক মান U অথবা U-এর যে-কোনো একমুখী রূপান্তর।

ভোক্তার সমস্যা হ'ল x-এর এমন একটি মান নির্বাচন করা যাতে ক'রে $U(x)$-এর মান সর্বোচ্চ হতে পারে এবং ভোক্তার বাজেট শর্ত

$$M \geqq p_1x_1 + \cdots + p_nx_n \quad \ldots\ldots(1 \cdot 2)$$

পূরণ হয়।

আমরা ধ'রে নিচ্ছি যে $(1 \cdot 1)$-এর স্বাধীন চলগুলি $x_1, \ldots, x_n$ আলোচ্য ইউক্লিডীয় স্পেসের অঋণাত্মক অংশের মধ্যে সীমাবদ্ধ। অর্থাৎ, $x_i \geqq 0 \, (i = 1, \ldots, n)$। মোট উপযোগ U-কেও ধনাত্মক রাশি হিসেবে ধরা হচ্ছে। উপরন্তু আমরা যদি ধ'রে নিই যে অন্যান্য দ্রব্যের পরিমাণ অপরিবর্তিত অবস্থায় ভোক্তা যদি একটিমাত্র দ্রব্যের ব্যবহার বাড়ায় তাহলে তার উপযোগ অপেক্ষকের মান বৃদ্ধি পায় সেক্ষেত্রে আমরা পাই

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} > 0 \quad (i=1, \ldots, n)। \quad \ldots\ldots(1 \cdot 3)$$

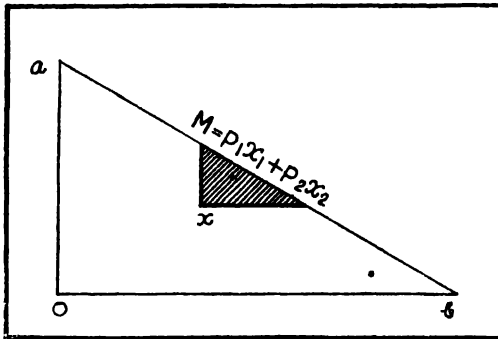
$(1 \cdot 3)$-এর তাৎপর্য এই যে ভোক্তার কাছে আলোচ্য দ্রব্যাদির প্রত্যেকটিই কাম্য। অর্থাৎ, বৃহত্তর দ্রব্যসমষ্টি ভোক্তার কাছে সর্বদাই বেশি পছন্দ। কিন্তু দ্রব্যসমষ্টি বৃহত্তর বলতে কি বোঝায়? নিচের সংজ্ঞায় এই প্রশ্নের উত্তর পাওয়া যাবে।

সংজ্ঞা 1.1 দুটি দ্রব্যসমষ্টি $x = (x_1, \ldots, x_n)$ এবং $y = (y_1, \ldots, y_n)$-এর মধ্যে x-কে y-এর থেকে **বৃহত্তর** বলা হয় যদি $x_i \geqq y_i \, (i = 1, \ldots, n)$ এবং অন্তত একটি i-এর জন্য $x_i > y_i$। x y-এর থেকে বৃহত্তর হ'লে

আমরা লিখি $x > y$। ভোক্তার কাছে বৃহত্তর দ্রব্যসমষ্টি যদি বেশি পছন্দ হয় তাহলে

$x > y \rightarrow xPy$। ......(1·4)

(1·3) বা (1·4) -এ বর্ণিত পছন্দ সম্পর্কের যে-ধর্ম তাকে নাম দেওয়া যেতে পারে অসম্পৃক্তি। (1·3) বা (1·4) -এর তাৎপর্য এই যে ভোক্তার কাছে আলোচ্য দ্রব্যের কোনোটাই এতো বেশি পরিমাণে নেই যে সে ঐ দ্রব্যগুলি আর চাইবে না। অর্থাৎ, ঐ দ্রব্যগুলিতে ভোক্তা সম্পৃক্ত নয়। এখানে P হ'ল স্পষ্ট পছন্দের নির্দেশক। আমাদের উপযোগ অপেক্ষক যেহেতু ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ তাই $x > y \rightarrow U(x) > U(y)$।

(1·3) বা (1·4) -এর অঙ্গীকার মেনে নিলে দেখানো যায় যে (1·2) - এর বাজেট শর্ত একটি সমীকরণে পর্যবসিত হয়। কারণ, ভোক্তা যতোক্ষণ পর্যন্ত এমন দ্রব্যসমষ্টি নির্বাচন করবে যে $M > \sum_i p_i x_i$ ততোক্ষণ পর্যন্ত তার উপযোগ অপেক্ষকের মান কখনোই সর্বোচ্চ হতে পারে না। $n = 2$-এর জন্য নিচের চিত্র থেকে এই কথাটা পরিষ্কার করা যেতে পারে।

চিত্র 1·1

মনে করা যাক x এমন যে-কোনো একটি দ্রব্যসমষ্টি যে $\sum_i p_i x_i < M$। সেক্ষেত্রে স্পষ্টই দেখা যাচ্ছে যে রেখা-চিহ্নিত অংশের মধ্যেকার যে-কোনো

দ্রব্যসমষ্টি x-এর তুলনায় বৃহত্তর, অর্থাৎ x-এর তুলনায় বেশি পছন্দ। অতএব রেখা-চিহ্নিত অংশের মধ্যে U-অপেক্ষকের মান $U(x)$-এর চেয়ে বড়ো। কাজেই ভোক্তা যদি উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মানে পৌঁছতে চায় তাহলে তাকে এমন দ্রব্যসমষ্টি নির্বাচন করতে হবে যে

$$M = p_1x_1 + \ldots + p_nx_n \qquad \ldots\ldots (1\cdot5)$$

আমাদের সমস্যা হ'ল সমীকরণ $(1\cdot5)$-এর শর্তাধীন $(1\cdot1)$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করা।

তাত্ত্বিক দিক থেকে এখানে একটি প্রশ্ন প্রাসঙ্গিক। আমাদের আলোচ্য সমস্যায় সর্বোচ্চ মানের যে অস্তিত্ব থাকবে তার প্রমাণ কি? এই প্রশ্নের গাণিতিক সদুত্তর দেওয়া সম্ভব। তবে বর্তমানে আমরা সেই প্রশ্নের পূর্ণ বিচারের মধ্যে যাচ্ছি না। এখানে প্রমাণ ছাড়া প্রাসংগিক গাণিতিক প্রতিপাদ্যটির কেবল উল্লেখ করা হবে এবং আমাদের সমস্যায় তার প্রয়োগের সম্ভাবনা দেখানো হবে। গাণিতিক বিশ্লেষণে নিরবচ্ছিন্ন অপেক্ষক সম্বন্ধে একটি প্রতিপাদ্য প্রমাণ করা হয়:

S যদি একটি সীমাবদ্ধ এবং বদ্ধ সেট হয় তাহলে S-এর উপরে সংজ্ঞায়িত যে-কোনো নিরবচ্ছিন্ন অপেক্ষক S-এর অন্তর্ভুক্ত কোনো বিন্দুতে তার সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান গ্রহণ করে।[1]

$M \geqq {}^i\Sigma\, p_ix_i$ এই শর্ত পূরণ করে যে-সমস্ত দ্রব্যসমষ্টি তাদের সেটটি স্পষ্টতই সীমাবদ্ধ এবং বদ্ধ। চিত্র 1.1-এর দ্বিমাত্রিক স্পেসে ab রেখা এবং Oab ত্রিভুজের অন্তর্ভুক্ত সব দ্রব্যসমষ্টি হ'ল আলোচ্য সেট। আমাদের উপযোগ অপেক্ষক $(1\cdot1)$ নিশ্চয়ই নিরবচ্ছিন্ন।[2] অতএব,

[1] প্রকৃত রেখার উপরে এই প্রতিপাদ্যের প্রমাণের জন্য দ্রঃ Carslaw—*Introduction to Fourier's Series and Integrals* পৃঃ 70-71।

[2] উপযোগ অপেক্ষকের নিরবচ্ছিন্নতা ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের নিরবচ্ছিন্নতার উপর নির্ভরশীল। তৃতীয় পরিচ্ছেদে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ককে আমরা যে-অর্থে নিরবচ্ছিন্ন ব'লে গ্রহণ করেছি তাতে উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব প্রমাণ করা সম্ভব হয়েছে। পছন্দ সম্পর্ককে আর একটু অন্য অর্থে নিলেই সংশ্লিষ্ট উপযোগ অপেক্ষকের নিরবচ্ছিন্নতাও প্রমাণ করা যায়। এর জন্য দ্রঃ Debreu—পূর্বোল্লিখিত এবং Rader—পূর্বোল্লিখিত।

উপরোক্ত গাণিতিক প্রতিপাদ্যের ভিত্তিতে আমরা ধ'রে নিতে পারি যে U অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান আলোচ্য সেটের উপরে কোথাও থাকবে।

(1·5) -এর শর্তাধীন (1·1) -এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের জন্য প্রয়োজনীয় লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক

$$L = U(x_1, \ldots, x_n) + \lambda[p_1x_1 + \ldots + p_nx_n - M] \qquad \ldots (1\cdot6)$$

(1·6) -এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের জন্য

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i} &= U_i(x_1, \ldots, x_n) + \lambda p_i = 0 \ (i = 1, \ldots, n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - M = 0. \end{aligned}\right\} \quad (1\cdot7)$$

এখানে $U_i(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{dU(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$ হ'ল i-তম দ্রব্যের পরিবর্তনজনিত উপযোগ অপেক্ষকের আংশিক ডেরিভেটিভ, অর্থাৎ i-তম দ্রব্যের প্রান্তিক উপযোগ। (1·7) -এর $(n+1)$ সংখ্যক সমীকরণগুলিকে $x_i (i = 1, \ldots, n)$ এবং λ এই $(n+1)$ -সংখ্যক চলের জন্য সমাধান করতে পারলে ভোক্তার স্থিতিসাম্যের সমাধান পাওয়া যাবে। মনে করা যাক $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ এবং $\bar{\lambda}$ হ'ল চলগুলির সমাধান মান। এই মানগুলির জন্য L-এর মান সর্বোচ্চ হবে যদি $\bar{x}_i$-এর জন্য

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & p_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad \ldots$$

$$\ldots\ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} \ldots U_{1n} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} \ldots U_{2n} & p_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ U_{n1} & U_{n2} \ldots U_{nn} & p_n \\ p_1 & p_2 \ldots p_n & 0 \end{vmatrix} > 0 \quad \ldots\ldots \quad (1\cdot8)$$

(1·7) -এর সমীকরণগুলি হ'ল ভোক্তার স্থিতাবস্থার সমীকরণ। (1·7) এবং (1·8) -এর শর্তগুলিকে একযোগে বলা যেতে পারে ভোক্তার স্থিতি-সাম্যের শর্ত।

ভোক্তার ব্যবহার্য দ্রব্য দুটি মাত্র হ'লে, অর্থাৎ, $n=2$ এই ক্ষেত্রে, স্থিতিসাম্যের শর্তগুলি হবে

$$\left.\begin{array}{l} U_1(x_1, x_2)+\lambda p_1=0 \\ U_2(x_1, x_2)+\lambda p_2=0 \\ p_1x_1+p_2x_2-M=0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots(1\cdot9)$$

এবং
$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} >0 \text{।} \qquad \ldots\ldots(1\cdot10)$$

(1·8) বা (1·10) -এর তাৎপর্য পরবর্তী দুটি অংশের আলোচনা থেকে পরিষ্কার হবে।

2. চাহিদা অপেক্ষক

(1·7) -এর সমীকরণগুলিকে সমাধান ক'রে x_i এবং λ-এর সাম্যমান পেতে হবে। লক্ষণীয় যে (1·7) -এর সমীকরণগুলির অন্তর্ভুক্ত মোট রাশির সংখ্যা $2(n+1)$—n-সংখ্যক x_i, n-সংখ্যক p_i, λ এবং M। x_i এবং λ-এর জন্য এই সমীকরণগুলির সমাধানের অর্থ হ'ল $2(n+1)$-সংখ্যক রাশির মধ্য থেকে $(n+1)$-সংখ্যক রাশিকে বাকি $(n+1)$-সংখ্যক রাশির উপর নির্ভরশীল হিসেবে প্রকাশ করা। এরকম প্রকাশ করা সব সময়ে সম্ভব নাও হতে পারে। বস্তুত, এই ভাবে প্রকাশ করতে পারলেই তবে আমরা বলি যে সমীকরণগুলি সমাধানযোগ্য। যদি আমাদের আলোচ্য সমীকরণগুলি সমাধানযোগ্য হয় তবে চলগুলির সাম্যমানকে প্যারামিটার-গুলির উপর নির্ভরশীল হিসেবে লেখা যুক্তিযুক্ত। স্থিতিসাম্যের সমী-করণগুলিকে নিহিত রূপে লিখলে আমরা পাই

$$F_j(x_1, \ldots, x_n ; p_1, \ldots, p_n ; \lambda, M)=0 (j=1, \ldots, n+1) \qquad \ldots(2\cdot1)$$

নিহিত রূপের এই সমীকরণগুলির সমাধান থেকে আমরা পেতে পারি

$$x_i = x_i(p_1, \ldots, p_n, \bar{M}) \quad (i=1, \ldots, n) \qquad \ldots\ldots(2\cdot2)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(p_1, \ldots, p_n, M) \qquad \ldots\ldots(2\cdot3)$$

(2·2) আমাদের নির্ণেয় চাহিদা অপেক্ষক। অতএব দেখা গেল যে চাহিদা অপেক্ষক নির্ধারণ করতে গেলে স্থিতিসাম্যের সমীকরণের সমাধান করতে পারা দরকার। চাহিদা অপেক্ষকের অস্তিত্ব স্থিতিসাম্যের সমীকরণের সমাধানযোগ্যতার উপর নির্ভরশীল।

(2·1)-এর সমাধানযোগ্যতা গণিতের নিহিত অপেক্ষক প্রতিপাদ্যের সাহায্যে নির্ধারণ করা যায়।[1] প্রতিপাদ্যটি পূর্ণাঙ্গ প্রমাণ করার অবকাশ এখানে নেই। চারটি রাশি সম্বলিত দুটি নিহিত সমীকরণের সমাধান-যোগ্যতার সংক্ষিপ্ত আলোচনা এখানে করা হবে। এর থেকে আমাদের ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক শর্ত কি হবে তার একটা ধারণা পাওয়া যাবে।

মনে করা যাক দুটি নিহিত সমীকরণ দেওয়া আছেঃ

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, u, v) &= 0 \\ G(x, y, u, v) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(2\cdot4)$$

ধরা যাক (x_0, y_0, u_0, v_0) এই চতুর্মাত্রিক বিন্দুতে সমীকরণ দুটি সিদ্ধ। তাহলে

$$\left.\begin{aligned} F(x_0, y_0, u_0, v_0) &\equiv 0 \\ G(x_0, y_0, u_0, v_0) &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(2\cdot5)$$

আমাদের নির্ণেয় অপেক্ষক দুটি হ'ল

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x, y) \\ v &= g(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots(2\cdot6)$$

অর্থাৎ, u এবং v-কে x এবং y-এর উপর নির্ভরশীল হিসেবে প্রকাশ করাই আমাদের লক্ষ্য। (2·6)-কে ঘাত শ্রেণী হিসেবে বিস্তার করলে আমরা পাই

---

[1] নিহিত অপেক্ষক প্রতিপাদ্যের বিস্তৃত আলোচনা এবং প্রমাণের জন্য দ্রঃ Sokolnikoff—Advanced Calculus, পরিচ্ছেদ 12।

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \ldots \\ v &= g(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

(2·7) -এর সহগ $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0$

ইত্যাদির মান নির্ণয়ের জন্য (2·4) -এর সমীকরণ দুটিকে ব্যবহার করা যেতে পারে। (2·4) -এর সমীকরণ থেকে x-এর পরিবর্তনজনিত ডেরিভেটিভ নিলে আমরা পাই

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2.8)$$

(2·8) -কে $\frac{\partial u}{\partial x}$ এবং $\frac{\partial v}{\partial x}$ -এর জন্য সমাধান করলে আমরা পাই

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \ldots (2.9)$$

এবং

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \ldots (2.10)$$

এখন যদি

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

তাহলে (2·9) এবং (2·10) থেকে $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ এবং $\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_0$ -এর মান নির্ণয় করা যায়। একই রকমভাবে (2·4) থেকে y-এর পরিবর্তনজনিত ডেরিভেটিভ্ নিলেই আমরা $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ এবং $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0$ নির্ণয় করতে পারব। লক্ষণীয় যে এ-ক্ষেত্রেও Δ-ডিটারমিনাণ্ট অপরিবর্তিত থাকবে। (2·7) -এর অন্তর্গত $(x-x_0)^2$, $(y-y_0)^2$ ইত্যাদি পদগুলির সহগও একই রকমে প্রথম আংশিক ডেরিভেটিভগুলি থেকে নির্ণয় করা যাবে। অর্থাৎ u এবং v-কে x এবং y-এর উপর নির্ভরশীল অপেক্ষক হিসেবে লিখতে গেলে Δ-ডিটারমিনাণ্ট অশূন্য হতে হবে।

ভোক্তার স্থিতিসাম্যের সমীকরণ (1·7) -এর ক্ষেত্রে অশূন্য Δ-ডিটারমিনাণ্টের শর্ত প্রয়োগ করলে আমরা পাই

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2n} & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{n1} & U_{n2} & \dots & U_{nn} & p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \dots(2\cdot11)$$

এখানে U_{ij}-গুলি হ'ল U-অপেক্ষকের দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভ্।

বাজেট সমীকরণের শর্তাধীন ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ধারণ করতে গেলে (1·8) -এর শর্ত সিদ্ধ হওয়া প্রয়োজন; আর তাহলেই (2·11) -এর শর্তও সিদ্ধ। অতএব ভোক্তার সাম্যাবস্থা সমস্যার সমাধান করতে পারলেই তার চাহিদা অপেক্ষকের অস্তিত্বও থাকবে।

3. পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতা

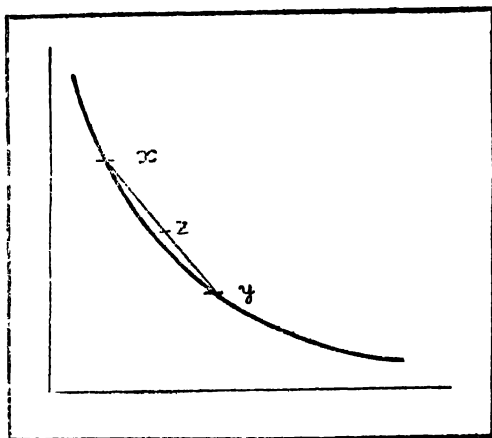
উপরের আলোচনা থেকে দেখা গেল যে উপযোগ অপেক্ষকের দ্বিতীয় ডেরিভেটিভ্গুলির উপর এক বিশেষ শর্তসাপেক্ষে ভোক্তার স্থিতিসাম্যের সমাধান তথা চাহিদা অপেক্ষকের অস্তিত্ব প্রমাণ করা যায়। এখন প্রশ্ন

হ'লঃ উপযোগ অপেক্ষকের এই শর্ত ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের কোন বিশেষ চরিত্রের নির্দেশক? পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতার ভিত্তিতে এই প্রশ্নের উত্তর দেওয়া যায়। বর্তমান অংশে আমরা প্রমাণ করব যে ভোক্তার যে পছন্দ সম্পর্ক আমরা আগে নিয়েছি তা যদি উত্তল হয় তাহলে তার উপযোগ অপেক্ষকের বেলায় (1·8)-এর শর্ত সিদ্ধ হবে। এবং সেই উপযোগ অপেক্ষকের জ্যামিতিক প্রতিরূপ হিসেবে যে-সমউপযোগ রেখা পাওয়া যায় তাও উৎস বিন্দুর দিকে উত্তল। অর্থাৎ, সমউপযোগ রেখার উত্তলতা ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতার সংগে জড়িত। অতএব ভোক্তার স্থিতিসাম্য বা তার চাহিদা অপেক্ষকের অস্তিত্বও পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতার উপর নির্ভরশীল।

সংজ্ঞা 3·1 ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ক R-কে **উত্তল** বলা হয় যদি

$$xIy^{1} \rightarrow \{tx+(1-t)y\}Rx,\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \qquad \ldots\ldots(3\cdot1)$$

এই সংজ্ঞার $tx+(1-t)y,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$, এই মিশ্রণকে বলা হয় **উত্তল মিশ্রণ**। x এবং y-এর উত্তল মিশ্রণে প্রাপ্য যে-কোনো বিন্দুর জ্যামিতিক অবস্থিতি x এবং y-এর মধ্যবর্তী (অন্তর্বিন্দুতেও হতে পারে)। অতএব সংজ্ঞা 3·1-এর তাৎপর্য এই যে x এবং y-এর মধ্যে কোনোটিই যদি অন্যটির তুলনায় স্পষ্ট পছন্দ না হয় তাহলে x এবং y-এর মধ্যবর্তী (অন্তর্বিন্দুদ্বয় সমেত) কোনো দ্রব্যসমষ্টিই x-এর তুলনায় অন্তত অপছন্দ নয়।

নিচের চিত্রে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে উৎস বিন্দুর দিকে উত্তল **সম-উপযোগ** রেখার ক্ষেত্রে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ক উত্তল।

চিত্র 3·1

[1] R-এর সাহায্যে I-এর সংজ্ঞাঃ $xIy \leftrightarrow xRy$ এবং yRx।

x এবং y যেহেতু একই সমউপযোগ রেখার বিন্দু তাই xIy। x এবং y-এর উত্তল মিশ্রণে প্রাপ্য বিন্দু z কখনোই x-এর তুলনায় অপছন্দ হতে পারে না, কারণ, z-এর অবস্থিতি নিশ্চয়ই x, y-এর সমউপযোগ রেখার ঊর্ধ্বতর অংশে। বস্তুত, চিত্র $3\cdot1$-এ সমউপযোগ রেখা যেভাবে আঁকা হয়েছে তাতে z শুধু x-এর তুলনায় অপছন্দ হতে পারে না তাই নয়, z অবশ্যই x-এর তুলনায় স্পষ্ট পছন্দ। সমউপযোগ রেখা সরলরৈখিক হ'লেও তা উত্তল পছন্দ সম্পর্কের নির্দেশক হতে পারত; উৎস বিন্দুর দিকে **স্পষ্টত উত্তল** সমউপযোগ রেখাকে **স্পষ্টত উত্তল পছন্দ সম্পর্কের** নির্দেশক বলা হয়।

সংজ্ঞা $3\cdot2$

উত্তল সেটঃ মনে করা যাক E^n হ'ল n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় স্পেস এবং S তার একটি উপসেট। S-কে **উত্তল সেট** বলা হয় যদি S-এর অন্তর্গত যে-কোনো x, y-এর জন্য

$$z=\{tx+(1-t)y\}\varepsilon\ S,\ (0\leqslant t\leqslant 1)। \qquad \ldots.(3\cdot2)$$

লক্ষণীয় যে সমগ্র ইউক্লিডীয় স্পেস অবশ্যই একটি উত্তল সেট।

উত্তল সেটের সংজ্ঞার সাহায্যে উত্তল পছন্দ সম্পর্কের একটি তাৎপর্য সহজে লক্ষ্য করা যেতে পারে। x যদি একটি নির্দিষ্ট দ্রব্যসমষ্টি হয় তাহ'ল x-এর তুলনায় পছন্দ, অন্তত x-এর চেয়ে কম পছন্দ নয়, এমন সব দ্রব্যসমষ্টির সেট একটি উত্তল সেট। অর্থাৎ, সমউপযোগ রেখা যে-সেটের নিম্নসীমা সেই সেটটি উত্তল সেট। এই হ'ল ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতার জ্যামিতিক তাৎপর্য।

পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতার এই ধারণার সঙ্গে $(1\cdot8)$-এর শর্তাবলির যোগাযোগ এখন আলোচনা করা যেতে পারে। আলোচনার সুবিধার জন্য আমরা মাত্র দুটি দ্রব্যের কথা ভাবছি। সেক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক শর্ত হ'ল $(1\cdot10)$, অর্থাৎ,

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0।$$

মাত্র দুটি দ্রব্যের বেলায় সমউপযোগ রেখার সমীকরণ হ'ল,

$$U=U(x_1, x_2)=c। \qquad \ldots.(3\cdot3)$$

এখানে c যে-কোনো মানের একটি প্যারামিটার। c-এর পরিবর্তিত মানের

সঙ্গে সঙ্গে আমরা সমউপযোগ চিত্রের এক একটি নির্দিষ্ট রেখা পাব। (3·3) -এর সমউপযোগ রেখা প্রতিবিন্দুতে উৎসের দিকে উত্তল হ'লে $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} > 0$। (3·3) থেকে x_1-এর পরিবর্তনজনিত আংশিক ডেরিভেটিভ্ নিলে আমরা পাই

$$U_1 + U_2 \frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

অথবা

$$\frac{dx_2}{dx_1} \quad \frac{U_1}{U_2} \qquad \ldots .(3\cdot4)$$

(3·4) থেকে $\frac{d}{dx_1}\left(-\frac{U_1}{U_2}\right)$ হিসাব করলে আমরা পাই

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -\frac{1}{U_2^3}\left[U_{11}\ U_2^2 - 2U_{12}\ U_1\ U_2 + U_{22}\ U_1^2\right] \qquad \ldots\ldots(3\cdot5)$$

সাম্যাবস্থার শর্তাবলি (1·7) থেকে পাওয়া যায় $U_1/U_2 = p_1/p_2$, অর্থাৎ, $U_1 = p_1U_2/p_2$। (3·5) -এর সমীকরণে U_1-এর এই মান বসিয়ে সরল করলে আমরা পাই

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = -\frac{1}{U_2p_2^2}\left[U_{11}\ p_2^2 - 2U_{12}\ p_1\ p_2 + U_{22}\ p_1^2\right] \qquad \ldots\ldots(3\cdot6)$$

অতএব সমউপযোগ রেখা উৎসবিন্দুর দিকে উত্তল হ'লে

$$U_{11}\ p_2^2 - 2U_{12}\ p_1\ p_2 + U_{22}\ p_1^2 < 0 \qquad \ldots\ldots(3\cdot7)$$

অথবা

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0।$$

উপরের আলোচনা থেকে স্থিতিসাম্যের জন্য প্রয়োজনীয় ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের শর্তাবলি পুরোপুরি পাওয়া গেল। ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ক

যদি স্ববৃত, সম্পূর্ণ, সংক্রমী ও নিরবচ্ছিন্ন হয় তাহলে সেই পছন্দ সম্পর্কের যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব। উপরন্তু পছন্দ সম্পর্ক যদি উত্তল হয় তাহলে ভোক্তার স্থিতিসাম্য এবং তার চাহিদা রেখার অতিত্বও থাকবে। স্থিতিসাম্যের দ্রব্যসমষ্টি থেকে ভোক্তা বাজেট শর্ত-সাপেক্ষে সর্বোচ্চ উপযোগ লাভ করে।

উপরন্তু, যে নিহিত অপেক্ষক প্রতিপাদ্যের সাহায্যে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের অস্তিত্ব প্রমাণ করা হ'ল তার সাহায্যে এটাও বলা চলে যে চাহিদা অপেক্ষকও নিরবচ্ছিন্ন হবে। এখানে লক্ষণীয় যে এই নিরবচ্ছিন্ন চাহিদা অপেক্ষকের স্লোপ বা অনুরূপ কোনো ধর্ম কিন্তু স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ থেকে পাওয়া যায় নি—তা প্রত্যাশিতও নয়। চাহিদা অপেক্ষকের প্রয়োজনীয় এম্পিরিকাল গুণাবলি নির্ধারণ করার জন্য তুলনামূলক স্থিতাবস্থার বিশ্লেষণ প্রয়োজন।

1. তুলনামূলক স্থিতাবস্থা

বর্তমান প্রসঙ্গে তুলনামূলক স্থিতাবস্থার আলোচনা করতে গেলে প্যারামিটারগুলির পরিবর্তনজনিত চলগুলির সাম্যমানের পরিবর্তন হার নির্ধারণ করতে হবে। আলোচ্য প্রসঙ্গের প্যারামিটার হ'ল $p_1, \ldots, p_n$ মূল্যাবলি এবং আর্থিক আয় M।

আংশিক সাম্যাবস্থার প্রসঙ্গে যে যুক্তিতে চাহিদা অপেক্ষকের সম-মাত্রিকতার ধর্ম নির্ধারণ করা হয়েছিল এখানেও ঠিক সেই যুক্তিতে ঐ একই সমমাত্রিকতার ধর্ম পাওয়া যেতে পারে। নির্দিষ্ট মূল্যাবলি এবং আর্থিক আয় যদি একই অনুপাতে পরিবর্তিত হয় তাহলে যেহেতু বাজেট সমীকরণ অপরিবর্তিত থাকে তাই ভোক্তার স্থিতিসাম্যের সমীকরণগুলির কোনো পরিবর্তন হয় না। ফলে সমীকরণগুলির সমাধান মানও অপরিবর্তিত থাকে। অতএব মূল্যাবলি ও আয়ের আনুপাতিক পরিবর্তনের ফলে দ্রব্যাদির চাহিদা অপরিবর্তিত থাকে। এই কারণে চাহিদা অপেক্ষক আয় ও মূল্যাবলিতে শূন্য ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক। সমমাত্রিকতার এই ধর্মকে বলা হয়ে থাকে 'আর্থিক মোহে'র অনুপস্থিতি। মূল্যাবলি নিরপেক্ষভাবে ভোক্তার কাছে আর্থিক আয়ের কোনো তাৎপর্য নেই।

তুলনামূলক স্থিতাবস্থার পূর্ণাঙ্গ বিশ্লেষণের জন্য $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$ এবং $\frac{\partial x_i}{\partial M}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ রাশিগুলি নির্ধারণ করা প্রয়োজন। সেই উদ্দেশ্যে

সাম্যবিন্দুতে সাম্যাবস্থার সমীকরণগুলির পূর্ণ ডিফারেন্শিয়াল নেওয়া হ'ল :

$$\left.\begin{aligned}
&U_{11}dx_1+U_{12}\,dx_2+\ldots+U_{1i}\,dx_i+\ldots+U_{1n}\,dx_n \\
&\qquad\ldots\ldots \qquad\qquad + p_1 d\lambda = -\lambda dp_1 \\
&U_{j1}\,dx_1+U_{j2}\,dx_2+\ldots+U_{ji}\,dx_i+\ldots+U_{jn}\,dx_n \\
&\qquad\qquad\qquad + p_j d\lambda = -\lambda dp_j \\
&U_{n1}\,dx_1+U_{n2}\,dx_2+\ldots+U_{ni}\,dx_i+\ldots \\
&\qquad\qquad + U_{nn}\,dx_n+p_n\,d\lambda = -\lambda dp_n \\
&p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots+p_i dx_i+\ldots+p_n\,dx_n \\
&\qquad\qquad = dM-[\,x_1\,dp_1+\ldots+x_n\,dp_n\,]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(4\cdot1)$$

$(4\cdot1)$ -এর সমীকরণগুলিকে ক্রেমার পদ্ধতিতে dx_i-এর জন্য সমাধান করলে আমরা পাই

$$dx_i = \frac{1}{D}[-\lambda dp_1\,D_{1i}-\lambda dp_2\,D_{2i}-\ldots-\lambda dp_j\,D_{ji}-\ldots-\lambda dp_n\,D_{ni}$$
$$+\ (dM-x_1\,dp_1-\ldots-x_n\,dp_n)D_{n+1,i}\,] \qquad .(4\cdot2)$$

এখানে

$$D = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12}\ldots & U_{1i}\ldots & U_{1n} & p_1 \\ U_{j1} & U_{j2}\ldots & U_{ji}\ldots & U_{jn} & p_j \\ U_{n1} & U_{n2}\ldots & U_{ni}\ldots & U_{nn} & p_n \\ p_1 & p_2\ldots & p_i\ldots & p_n & 0 \end{vmatrix}$$

এবং D_{ji} হ'ল D-ডিটারমিনাণ্টের j-তম সারি ও i-তম স্তম্ভের কোফ্যাক্টর।

এখন $dp_i\,(i \neq j) = 0$ ধরে নিয়ে $(4\cdot2)$ -এর দুদিকে dp_j দিয়ে ভাগ করলে আমরা আংশিক ডেরিভেটিভ্ $\frac{\partial x_i}{dp_j}$ পেয়ে যাই :

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{1}{D}\ [-\lambda D_{ji}-x_j\,D_{n+1,\,i}] \qquad \ldots(4\cdot3)$$

একই রকম ভাবে $(4 \cdot 2)$-কে dM দিয়ে ভাগ করলে পাই

$$\frac{\partial x_i}{\partial M} = \frac{D_{n+1, i}}{D} \qquad \ldots(4 \cdot 4)$$

$(4 \cdot 3)$ এবং $(4 \cdot 4)$ থেকে পাইঃ

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \frac{\lambda D_{ji}}{D} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} \qquad \ldots(4 \cdot 5)$$

রুশ অর্থনীতিবিদ ইউজেন্ স্লুট্স্কীর নামানুসারে $(4 \cdot 5)$-কে বলা হয় স্লুট্স্কী সমীকরণ।

স্লুট্স্কী সমীকরণের ব্যাখ্যায় প্রথমে লক্ষ্য করা প্রয়োজন যে $D_{n+1, i}/D$ হ'ল আর্থিক আয়ের পরিবর্তনজনিত i-তম দ্রব্যের সাম্যমানের পরিবর্তন হার। এই কারণে $(4 \cdot 5)$-এর $x_j \dfrac{\partial x_i}{\partial M}$ পদটিকে বলা যেতে পারে j-তম দ্রব্যের মূল্যপরিবর্তনজনিত **আয় প্রভাব**। মনে করা যাক j-তম দ্রব্যের মূল্য একটু কমে গেল। অন্য সব কিছু অপরিবর্তিত থাকলে এই মূল্য হ্রাসের জন্য ভোক্তার প্রকৃত আয় কিছুটা বৃদ্ধি পাবে, কারণ আগের দ্রব্য-সমষ্টি কিনতে গেলে এখন তার মোট খরচ কম হবে, অর্থাৎ তার পুরনো আর্থিক আয় থেকে কিছুটা উদ্বৃত্ত হবে। এই উদ্বৃত্ত আয়ের জন্য i-তম দ্রব্যের সাম্যমানের কি পরিবর্তন হবে তা নির্ভর করছে j-তম দ্রব্যের সাম্যমান x_j এবং $\partial x_i/\partial M$ এই পরিবর্তন হারের উপর। ভোক্তা যদি j-তম দ্রব্য আদৌ না কেনে, অর্থাৎ যদি $x_j = 0$ হয় তাহলে আয় প্রভাব স্বভাবতই শূন্য। কারণ, সেক্ষেত্রে মূল্য হ্রাসের ফলে ভোক্তার আর্থিক আয় থেকে উদ্বৃত্ত কিছু হচ্ছে না। এখানে লক্ষণীয় যে আয় প্রভাবের ফলে i-তম দ্রব্যের সাম্যমান বাড়বে কি কমবে তা নির্ভর করছে $\partial x_i/\partial M$-এর চিহ্নের উপরে। সাধারণভাবে, $\partial x_i/\partial M \gtrless 0$ দু'রকমই হতে পারে। যে-সমস্ত দ্রব্যের বেলায় $\partial x_i/\partial M < 0$ তাদের বলা হয় **নিকৃষ্ট দ্রব্য**। অর্থাৎ, নিকৃষ্ট দ্রব্য হ'ল এমন দ্রব্য যে আয় বৃদ্ধি হ'লে ভোক্তা সেই দ্রব্যের কম পরিমাণ সংগ্রহ করে। নিকৃষ্ট দ্রব্য ছাড়া অন্যান্য দ্রব্য, অর্থাৎ, সাধারণ দ্রব্যের বেলায় আয় প্রভাব ধনাত্মক।

স্লুট্স্কী সমীকরণ $(4 \cdot 5)$-এর অপর পদ—$\lambda D_{ji}/D$-এর ব্যাখ্যার জন্য মনে করা যাক যে j-তম দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে ভোক্তার আর্থিক আয়েও একটা কল্পিত পরিবর্তন করা হ'ল। ভোক্তার আর্থিক

আয় এমনভাবে কমিয়ে নেওয়া বা বাড়িয়ে দেওয়া হ'ল যে ভোক্তার মোট উপযোগ মূল্য পরিবর্তনের আগেও যা ছিল এখনও তাই রইল। সম-উপযোগ রেখার সমীকরণ যেহেতু

$$U(x_1, \ldots, x_n) = c$$

তাই আর্থিক আয়ের এই পরিবর্তনের ফলে $dU = 0$, অর্থাৎ,

$$U_1\, dx_1 + \ldots + U_n\, dx_n = 0 \text{।} \qquad \ldots(4\cdot 6)$$

স্থিতিসাম্যের শর্তাবলি থেকে আমরা পাই $U_i/p_i = \lambda\,(i=1, \ldots, n)$। অতএব, যদি $dU=0$ হয় তাহলে

$$p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n = 0 \qquad \ldots(4\cdot 7)$$

$(4\cdot 7)$-কে $(4\cdot 1)$-এর শেষ সমীকরণে বসালে আমরা পাই

$$dM - x_1 dp_1 \ \ldots \ - x_n dp_n = 0 \text{।}$$

এখন $(4\cdot 2)$-কে $dp_j[p_i(i \neq j) = 0]$ দিয়ে ভাগ করলে আমরা পাই

$$\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{U=U_0} = -\frac{\lambda D_{ji}}{D}; \qquad \ldots(4\cdot 8)$$

এখানে U_0 হ'ল মোট উপযোগ U-এর একটি নির্দিষ্ট মান। j-তম দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তনের সঙ্গে সঙ্গে ভোক্তার আর্থিক আয়ও যদি এমনভাবে পরিবর্তন করা সম্ভব হয় যে তার মোট উপযোগ অপরিবর্তিত থাকে তাহলে i-তম দ্রব্যের উপরে যে-প্রভাব তার পরিমাণ হ'ল $-\lambda D_{ji}/D$।

এই কারণে $\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{U=U_0}$-কে বলা হয় **পরিবর্ত প্রভাব**। $(4\cdot 5)$-এর $\frac{\partial x_i}{\partial p_j}$-কে যদি **মূল্য প্রভাব** বলা হয় তাহলে দেখা যাচ্ছে যে মূল্য প্রভাব দুটি ভিন্ন প্রভাবের যোগফল—পরিবর্ত প্রভাব ও আয় প্রভাব।

আয় প্রভাবের চিহ্নের ভিত্তিতে যেমন নিকৃষ্ট দ্রব্য এবং সাধারণ দ্রব্য এই শ্রেণীবিভাগ করা সম্ভব হয়েছে, তেমনি পরিবর্ত প্রভাবের চিহ্নের ভিত্তিতে দ্রব্যযুগ্ম পরিবর্তনীয় বা পরিপূরক তা নির্ধারণ করা সম্ভব।

সংজ্ঞা 4.1 কোনো দ্রব্যযুগ্মের বেলায় $S_{ij} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{U=U_0} > 0$ হ'লে i, j দ্রব্যযুগ্মকে বলা হয় **পরিবর্তনীয় (অথবা নীট পরিবর্তনীয়)**। $S_{ij} < 0$ হ'লে i, j দ্রব্যযুগ্মকে বলা হয় **পরিপূরক (অথবা নীট পরিপূরক)**।

সংজ্ঞা 4.2 কোনো দ্রব্যযুগ্মের বেলায় $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$ হ'লে i, j দ্রব্যযুগ্মকে বলা হয় গ্রোস পরিবর্তনীয় এবং $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} < 0$ হ'লে বলা হয় **গ্রোস পরিপূরক।**

সংজ্ঞা 4·2-এর পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার ধারণার মধ্যে আয় প্রভাব মিশে আছে ব'লে ধারণা দুটিকে গ্রোস বলা হচ্ছে; এবং যেহেতু সংজ্ঞা 4·1-এর ধারণা দুটি আয় প্রভাব মুক্ত তাই এদের বলা হচ্ছে নীট। স্পষ্টত দেখা যাচ্ছে যে গ্রোস পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার সঙ্গে নীট পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার সম্পর্ক নির্ভর করছে আয় প্রভাবের প্রকৃতির উপর। মনে করা যাক আলোচ্য দ্রব্যাদি সবই সাধারণ দ্রব্য. অর্থাৎ, আয় প্রভাব ধনাত্মক। সেক্ষেত্রে দুটি দ্রব্য নীট পরিবর্তনীয় বা নীট পরিপূরক হ'লে তারা গ্রোস পরিবর্তনীয় বা গ্রোস পরিপূরক হবে কি ?

(4·5) -এর স্লুট্স্কী সমীকরণকে এখন আমরা বিকল্প ভাবে লিখতে পারিঃ

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]_{U=U_0} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} = S_{ij} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} \quad ..(4.9)$$

(4·9) এর মধ্যে $\frac{\partial x_i}{\partial M} > 0$; এখন $S_{ij} > 0$ হ'লে $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \gtrless 0$ কিনা তা নির্ভর করছে $\left| S_{ij} \right| \gtrless \left| x_j \frac{\partial x_i}{\partial M} \right|$ কিনা তার উপর। অর্থাৎ, দ্রব্যযুগ্ম নীট পরিবর্তনীয় হ'লে সাধারণ দ্রব্যাদির ক্ষেত্রে গ্রোস পরিবর্তনীয় হবে কিনা তা নির্ভর করে পরিবর্ত প্রভাব ও আয় প্রভাবের মানের আপেক্ষিক বিচারের উপর। কিন্তু $S_{ij} < 0$ হ'লে, অর্থাৎ, দ্রব্যযুগ্ম নীট পরিপূরক হ'লে অবশ্যই তারা গ্রোস পরিপূরকও হবে।

i-তম দ্রব্য যদি নিকৃষ্ট দ্রব্য হয় তাহলে $\frac{\partial x_i}{\partial M} < 0$। সেক্ষেত্রে $S_{ij} > 0$ হ'লে $\frac{\partial x_i}{\partial p_j} > 0$ । অর্থাৎ, i-তম দ্রব্য নিকৃষ্ট দ্রব্য হ'ল i, j দ্রব্যযুগ্ম যদি নীট পরিবর্তনীয় হয় তাহলে তারা গ্রোস পরিবর্তনীয়ও হবে। একই রকম-ভাবে (4·9) থেকে দেখা যায় যে i-তম দ্রব্য নিকৃষ্ট দ্রব্য হলে i, j দ্রব্যযুগ্ম যদি নীট পরিপূরক হয় তাহলে তারা গ্রোস পরিপূরক বা গ্রোস পরিবর্তনীয়

দুইই হতে পারে। আগের মতোই এ ক্ষেত্রেও আয় প্রভাব ও পরিবর্ত প্রভাবের আপেক্ষিক মানের বিচার ছাড়া কোনো স্পষ্ট সিদ্ধান্ত করা চলে না।

সাধারণ ক্ষেত্রে চাহিদা অপেক্ষকের স্লোপ যে ঋণাত্মক তাও স্লুট্স্কী সমীকরণের বিশ্লেষণ থেকে নির্ধারণ করা সম্ভব। বস্তুত, স্লুট্স্কী সমীকরণের অন্যতম তাৎপর্য এই যে চাহিদা অপেক্ষকের কিছু এম্পিরিকাল ধর্ম আমরা এই সমীকরণ থেকে পাই। (4·5)-এ $i=j$-এর জন্য আমরা পাইঃ

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} = -\frac{\lambda D_{ii}}{D} - x_i \frac{\partial x_i}{\partial M} \qquad \ldots.(4\cdot 5a)$$

আলোচ্য দ্রব্য সাধারণ দ্রব্য হ'লে $\frac{\partial x_i}{\partial M} > 0$। সেক্ষেত্রে $\frac{\partial x_i}{\partial p_i}$-এর চিহ্ন, অর্থাৎ চাহিদা অপেক্ষকের নিজ মূল্যপরিবর্তনজনিত স্লোপের চিহ্ন নির্ভর করে $\lambda D_{ii}/D$-এর চিহ্নের উপর। আমাদের বর্তমান ক্ষেত্রে $\lambda < 0$, কারণ, (1·7)-এর প্রথম সমীকরণ থেকে $U_i/p_i = -\lambda$। U_i/p_i যেহেতু ধনাত্মক রাশি, তাই λ-কে ঋণাত্মক হতেই হবে। (1·8)-এর শর্তাবলির জন্য D_{ii} এবং D-এর চিহ্নও পরস্পর বিপরীত। অতএব D_{ii}/D রাশিটিও ঋণাত্মক। সুতরাং সাধারণ দ্রব্যের ক্ষেত্রে (4·5a)-এর $\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0$।

i-তম দ্রব্যটি নিকৃষ্ট দ্রব্য হ'লে $\frac{\partial x_i}{\partial M} < 0$। সেক্ষেত্রে পরিবর্ত প্রভাব ও আয় প্রভাব পরস্পর বিপরীতমুখী। কাজেই চাহিদা অপেক্ষকের স্লোপ যে ঋণাত্মক হবেই তা জোর ক'রে বলা চলে না। দ্রব্যমূল্যের সঙ্গে চাহিদার সম্পর্ক কেমন হবে তা নির্ভর করে $\frac{\lambda D_{ii}}{D}$ এবং $x_i \frac{\partial x_i}{\partial M}$ -এর আপেক্ষিক মানের উপর। এক্ষেত্রে ধনাত্মক রাশি $x_i \frac{\partial x_i}{\partial M}$ -এর আপেক্ষিক মান যদি ঋণাত্মক $-\frac{\lambda D_{ii}}{D}$-এর চেয়ে বড় হয় তাহলে দ্রব্যমূল্য এবং চাহিদার গতি একমুখী হবে। অর্থাৎ, চাহিদা অপেক্ষকের স্লোপ ধনাত্মক হবে। যে-সব দ্রব্যের বেলায় চাহিদা অপেক্ষকের স্লোপ ধনাত্মক তাদের বলে **গিফেন দ্রব্য**। লক্ষণীয় যে নিকৃষ্ট দ্রব্য মাত্রই গিফেন দ্রব্য নয়, যদিও গিফেন দ্রব্য মাত্রই নিকৃষ্ট দ্রব্য।

মাত্র দুটি দ্রব্যের বেলায় প্রাসঙ্গিক D-ডিটারমিনান্ট হ'লঃ

$$\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0।$$

এক্ষেত্রে $D_{11} = -p_2^2$ এবং $D_{22} = -p_1^2$। দুটি কোফ্যাক্টরই স্পষ্টত ঋণাত্মক। প্রথম এবং দ্বিতীয় দ্রব্যের বেলায় পরিবর্ত প্রভাব যথাক্রমে $\lambda p_2^2/D$ এবং $\lambda p_1^2/D$। যেহেতু $\lambda < 0$, তাই $S_{11} = \lambda p_2^2/D < 0$ এবং $S_{22} = \lambda p_1^2/D < 0$।

যে-কোনো সংখ্যক দ্রব্যের ক্ষেত্রে $S = \{S_{ij}\}$ মেট্রিক্সকে বলে নীট পরিবর্তনীয়তার মেট্রিক্স। দ্রব্যাদির মধ্যে নীট পরিবর্তনীয়তা (বা পরিপূরকতা)-র সম্পর্ক কেমন তা এই S-মেট্রিক্স থেকে পরিষ্কার জানা যায়। নীট পরিবর্তনীয়তার মেট্রিক্সের একটি উল্লেখযোগ্য ধর্ম হ'ল যে মেট্রিক্সটি প্রতিসম, অর্থাৎ, $S_{ij} = S_{ji}$। কারণ, (4 8) থেকে আমরা দেখতে পাই যে $S_{ij} = -\lambda D_{ji}/D$ এবং $S_{ji} = -\lambda D_{ij}/D$। যেহেতু D-ডিটারমিনান্টের অন্তর্গত $U_{ij} = U_{ji}$, তাই $D_{ji} = D_{ij}$। অতএব $S_{ij} = S_{ji}$। মাত্র দুটি দ্রব্যের বেলায়, $S_{12} = -\lambda p_1 p_2/D = S_{21}$। অর্থাৎ দুটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে নীট পরিবর্তনীয়তার মেট্রিক্স হ'লঃ

$$S = \begin{bmatrix} \lambda p_2^2/D & -\lambda p_1 p_2/D \\ -\lambda p_1 p_2/D & \lambda p_1^2/D \end{bmatrix} \qquad \ldots(4\cdot10)$$

নীট পরিবর্তনীয়তার মেট্রিক্স যে প্রতিসম তার তাৎপর্য এই যে i-তম দ্রব্য যদি j-তম দ্রব্যের নীট পরিবর্তনীয় হয়, তাহলে j-তম দ্রব্যও i-তম দ্রব্যের নীট পরিবর্তনীয়। নীট পরিপূরকতার জন্যেও অনুরূপ সমতা লক্ষণীয়। স্পষ্টত, গ্রোস পরিবর্তনীয়তা বা গ্রোস পরিপূরকতার জন্য এই প্রতিসাম্য অনুপস্থিত। আমরা আগেই দেখেছি যে i-তম দ্রব্য j-তম দ্রব্যের গ্রোস পরিবর্তনীয় (পরিপূরক) হ'লেও j-তম দ্রব্য i-তম দ্রব্যের গ্রোস পরিবর্তনীয় (পরিপূরক) নাও হতে পারে।

(4·10) থেকে দেখা যাচ্ছে যে যেহেতু $\lambda < 0$, তাই $S_{12} = S_{21} = -\lambda p_1 p_2/D > 0$। এই ফলটি খুব উল্লেখযোগ্য। এর তাৎপর্য এই যে

মাত্র দুটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে দ্রব্য দুটি পরস্পর নীট পরিবর্তনীয় হবেই। সহজে দেখানো যায় যে আমাদের আলোচ্য ক্ষেত্রে সব দ্রব্যগুলি পরস্পর পরিপূরক হতে পারে না। এই বক্তব্য প্রমাণের জন্য $S_{ij}p_j$ হিসাব করা যাক।

$$S_{ij}\,p_j = \frac{-\lambda p_j\,D_{ji}}{D}\text{।}$$

সমস্ত দ্রব্যাদির জন্য $S_{ij}p_j$ রাশিটির যোগফল নিলে আমরা পাইঃ

$$\sum_{j=1}^{n} S_{ij}\,p_j = -\frac{\lambda}{D}\sum_{j=1}^{n} p_j\,D_{ji} \qquad \ldots(4\cdot11)$$

কিন্তু $\sum_{j=1}^{n} p_j\,D_{ji} = p_1\,D_{1i} + p_2\,D_{2i} + \ldots + p_n\,D_{ni} = 0,$

কারণ p_j-কে গুণ করা হয়েছে যে কোফ্যাক্টর দিয়ে সেটা তার নিজস্ব কোফ্যাক্টর নয়। আমরা আগেই দেখেছি যে $S_{ii}\,(i=1,\ \ldots,\ n)<0$।

কাজেই যদি $\sum_{j=1}^{n} S_{ij}p_j = 0$ হয় তাহলে সব দ্রব্যগুলি কিছুতেই পরস্পর পরিপূরক হতে পারে না, কারণ সেক্ষেত্রে $S_{ij}\,(i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\ i\neq j)<0$ ব'লে $\sum_j S_{ij}p_j$ ঋণাত্মক হবেই। লক্ষণীয় যে সব দ্রব্য পরস্পর পরিবর্তনীয় হতে পারে। কারণ, $S_{ij}\,(i,\ j=1,\ \ldots,\ n,\ i\neq j)>0$ হ'লেও $\sum_j S_{ij}p_j = 0$ হতে পারে, কেননা $S_{ii}\,(i=1,\ \ldots\ n)<0$। এই কারণের জন্যই মাত্র দুটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে দ্রব্য দুটি পরিবর্তনীয় হবেই।

5. মৌলিক মেট্রিক্স সমীকরণ

চাহিদা তত্ত্বের সাধারণ আলোচনা স্বভাবতই n-দ্রব্যের ক্ষেত্রে করা হয়ে থাকে। আমরাও উপরের অংশে তাই করেছি। মাত্র দুটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে বিশেষ ফলগুলি n-দ্রব্যের ক্ষেত্রের সাধারণ ফল থেকে সহজেই পাওয়া যায়। এই কারণের জন্য n-দ্রব্যের ক্ষেত্রে প্রাসঙ্গিক সমীকরণগুলিকে সুবিধাজনক রূপে প্রকাশ করতে পারার তাৎপর্য আছে। এই উদ্দেশ্যে বর্তমান অংশে ভোক্তার সাধারণ সমস্যাটিকে মেট্রিক্স সমীকরণের রূপে বিশ্লেষণ করা হবে।

মনে করা যাক দ্রব্যাদি x এবং মূল্যাবলি p হ'ল $(n\times 1)$-ভেক্টর এবং ভোক্তার আর্থিক আয় M একটি স্কেলার রাশি। উপযোগ u-কেও একটি স্কেলার রাশি মনে করা হ'ল। অতএব ভোক্তার উপযোগ দাঁড়াচ্ছেঃ

$$u=f(x), \qquad \ldots(5\cdot 1)$$

ভোক্তার বাজেট শর্ত হ'লঃ

$$p'x=M\,। \qquad \ldots(5\cdot 2)$$

$(5\cdot 2)$-এর শর্তসাপেক্ষে $(5\cdot 1)$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের শর্তাবলি হ'লঃ

$$u_x=\lambda p^1 \qquad \ldots(5\cdot 3)$$
$$p'x=M \qquad \ldots(5\cdot 4)$$

এখানে

$$u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots \cdots , \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=(u_1, \ldots, u_n)'$$

হ'ল প্রান্তিক উপযোগের $(n\times 1)$-ভেক্টর। $(5\cdot 3)$ এবং $(5\cdot 4)$-এর সমাধান হিসেবে পাওয়া যায়

$$x=x(M, p) \qquad \ldots(5\cdot 5)$$
$$\lambda=\lambda(M, p)\,। \qquad \ldots(5\cdot 6)$$

প্রান্তিক উপযোগের ভেক্টর u_x-এর পূর্ণ ডিফারেন্শিয়াল হ'ল

$$du_x=\begin{bmatrix} u_{11} \ldots u_{1n} \\ \ldots \\ u_{n1} \ldots u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \cdot \\ dx_n \end{bmatrix}$$
$$=Udx\,; \qquad \ldots(5\cdot 7)$$

এখানে $U=[u_{ij}]$ এবং $dx=(dx_1, \ldots, dx_n)'$। লক্ষণীয় যে U একটি $(n\times n)$-মেট্রিক্স এবং dx একটি $(n\times 1)$-ভেক্টর। অতএব U এবং

---

1 মনে রাখতে হবে এখানে λ ধনাত্মক। এই পরিচ্ছেদের চতুর্থ অংশের মতো λ ঋণাত্মক হ'লে শর্তটি হবে $u_x=-\lambda p$।

dx-এর মেট্রিক্স গুণফল একটি $(n \times 1)$-ভেক্টর। কাজেই প্রান্তিক উপযোগের পূর্ণ ডিফারেন্শিয়াল du_x একটি $(n \times 1)$-ভেক্টর:

$$du_x = \begin{bmatrix} u_{11}dx_1 + \ldots + u_{1n}dx_n \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ u_{n1}dx_1 + \ldots + u_{nn}dx_n \end{bmatrix}$$

এবার (4·1)-এর সমীকরণগুলিকে মেট্রিক্স রূপে লিখলে আমরা পাই

$$Udx = pd\lambda + \lambda dp$$

$$dM = p'dx + x'dp$$

অথবা

$$\begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ -d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda I \\ 1 & -x' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dM \\ dp \end{bmatrix} \quad \ldots(5\cdot8)$$

(5·8)-কে বলা হয় চাহিদা তত্ত্বের মৌলিক মেট্রিক্স সমীকরণ।

এই মেট্রিক্স পদ্ধতির সাহায্যে নীট পরিবর্তনীয়তার মেট্রিক্সের একটি সুন্দর বিশ্লেষণ করা যায়। আমরা আগে দেখেছি যে মূল্যপ্রভাবের বিশ্লেষণ ক'রে আমরা দুটি ভিন্ন প্রভাব পেয়েছি—এবং তার ভিত্তিতে আমাদের সিদ্ধান্ত এই যে কোনো দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তন হ'লে দ্রব্যের চাহিদার উপর তার মোট প্রভাব পরিবর্ত প্রভাব এবং আয় প্রভাবের যৌথ ক্রিয়ার মধ্য দিয়ে নির্ধারিত হয়। তেমনি নীট পরিবর্ত প্রভাবের বিশ্লেষণ করলে দেখা যাবে তার মধ্যেও দুটি প্রভাব বর্তমান।

(5·5) এবং (5·6)-এর চাহিদা সমীকরণগুলির পূর্ণ ডিফারেন্শিয়াল নিলে আমরা পাই

$$dx = x_M\, dM + x_p\, dp \quad \ldots(5\cdot9)$$

$$d\lambda = \lambda_M dM + \lambda'_p dp\,; \quad \ldots(5\cdot10)$$

এখানে

$$x_M = \left[\frac{\partial x_i}{\partial M}\right]_{n\times 1}$$

$$\lambda_M = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial M}\right]$$

$$x_p = \left[\frac{\partial x_i}{dp_j}\right]_{n\times n}$$

$$\lambda_p = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial p_i}\right]_{n\times 1} \text{।}$$

(5·9) এবং (5·10) -কে লেখা যায়

$$\begin{bmatrix} dx \\ -d\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M & x_p \\ -\lambda_M & -\lambda'_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_M \\ d_p \end{bmatrix} \text{।} \quad \ldots(5\cdot 11)$$

(5·8) এবং (5·11) থেকে আমরা পাই

$$\begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_M & x_p \\ -\lambda_M & -\lambda'_p \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \lambda I \\ 1 & -x' \end{bmatrix} \text{।} \quad \ldots(5\cdot 12)$$

(5·12) -এর তাৎপর্য এই যে এই সমীকরণগুলির সমাধান থেকে x_M, x_p, λ_M এবং λ_p-এর উপর সাধারণ নিষেধ শর্ত পাওয়া যাবে। এইগুলিই হবে সাধারণ ক্ষেত্রে চাহিদা অপেক্ষকের নিষেধ শর্ত।

(5·12) -এর সমাধান হ'ল :

$$\begin{bmatrix} x_M & x_p \\ -\lambda_M & -\lambda'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \lambda I \\ 1 & -x' \end{bmatrix} \quad \ldots(5\cdot 13)$$

পার্টিশনড্ মেট্রিক্সের ইনভার্স-এর সূত্র অনুসারে হিসাব করলে পাওয়া যায় :

$$\begin{bmatrix} U & p \\ p' & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(p'U^{-1}p)^{-1}\begin{bmatrix} (p'U^{-1}p)U^{-1} - U^{-1}pp'U^{-1} & U^{-1}p \\ p'U^{-1} & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots(5\cdot 14)$$

অতএব (5·13) থেকে আমরা পাই

$$\lambda_M = (p' U^{-1} p)^{-1} \qquad \ldots (5\cdot 15)$$
$$x_M = \lambda_M U^{-1} p \qquad \ldots (5\cdot 16)$$
$$\lambda_p = -(\lambda x_M + \lambda_M x) \qquad \ldots (5\cdot 17)$$
$$x_p = \lambda U^{-1} - \lambda \lambda_M^{-1} x_M x'_M - x_M x' \qquad \ldots (5\cdot 18)$$

(5·18) হ'ল স্লুট্‌স্কী সমীকরণের মেট্রিক্স রূপ। লক্ষণীয় যে $x_p = \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]$ একটি $(n \times n)$-মেট্রিক্স এবং (5·18)-এর ডান দিককার রাশিটিও একটি $(n \times n)$-মেট্রিক্স। x_p-এর তিনটি পদের মধ্যে $x_M x' = \left[\frac{\partial x_i}{\partial M} x_j\right]_{n \times n}$ হ'ল আমাদের পরিচিত আয় প্রভাবের মেট্রিক্স। বাকি পদ দুটি হ'ল নীট পরিবর্ত প্রভাব। মনে করা যাক নীট পরিবর্ত মেট্রিক্স

$$S = \lambda U^{-1} - \lambda \lambda_M^{-1} x_M x'_M$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} u^{11} & \ldots & u^{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u^{n1} & \ldots & u^{nn} \end{pmatrix} - \lambda \lambda_M^{-1} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial x_1}{\partial M}\right)^2 & \frac{\partial x_1}{\partial M} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial M} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial M} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial M} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial M} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial M} & \frac{\partial x_n}{\partial M} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial M} & \cdots & \left(\frac{\partial x_n}{\partial M}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \left[u^{ij} \right] - \lambda \lambda_M^{-1} \left[\frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial M} \right]; \quad \ldots (5.19)$$

এখানে u_{ij} হ'ল U^{-1}-এর i, j-তম পদ। হাউথেকারের নামকরণে এই দুটি পদের প্রথমটিকে বলা হয়েছে **নির্দিষ্ট পরিবর্ত প্রভাব** এবং দ্বিতীয়টিকে বলা হয়েছে **সাধারণ পরিবর্ত প্রভাব**।

পরিবর্ত প্রভাবের এই দুটি ধারণা একটু বুঝে নেওয়া প্রয়োজন। নীট পরিবর্ত প্রভাব S_{ij}-এর চিহ্ন অনুসারে i, j-তম দ্রব্যের পরিবর্তনীয়তা বা পরিপূরকতার সংজ্ঞা আগে দেওয়া হয়েছে। এই সংজ্ঞা অনুসারে সব দ্রব্য পরস্পর পরিবর্তনীয় হতে পারে, কিন্তু পরিপূরক হতে পারে না। অতএব, ঐ সংজ্ঞা অনুসারে পরিবর্তনীয়তা এবং পরিপূরকতার ধারণার মধ্যে এক অপ্রতিসাম্য বর্তমান। এই কারণের জন্য আমরা দেখেছি যে শুধুমাত্র দুটি দ্রব্যের বেলায় দ্রব্যদুটি পরিবর্তনীয় হতে বাধ্য। এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে এই পরিবর্তনীয়তার মধ্যে দ্রব্য দুটির চারিত্রিক কোনো

নির্দিষ্ট গুণ নিহিত থাকতেই হবে এমন কোনো কথা নেই। বস্তুত, ভোক্তা যদি দুটি মাত্র দ্রব্যের মধ্যেই তার সব আয় খরচ করতে বাধ্য হয় তাহলে দ্রব্য দুটি এই অর্থে পরিবর্তনীয় যে ভোক্তার আয়ের জন্য যেন দ্রব্য দুটির মধ্যে একটা প্রতিযোগিতার সম্পর্ক রয়েছে। এই অর্থে যে পরিবর্তনীয়তা তাকেই বলা হয়েছে সাধারণ পরিবর্তনীয়তা বা সংশ্লিষ্ট প্রভাবকে বলা হয়েছে সাধারণ পরিবর্ত প্রভাব। দুটি দ্রব্যের মধ্যে সাধারণ পরিবর্তনীয়তার সম্পর্ক থাকলেই যে তাদের মধ্যে ভোক্তার একই ধরনের অভাব পূরণের অর্থে পরিবর্তনীয়তার সম্পর্ক থাকবে এমন কোনো কথা নেই। এই দ্বিতীয় অর্থের পরিবর্তনীয়তাকে বলা হয়েছে নির্দিষ্ট পরিবর্তনীয়তা এবং সংশ্লিষ্ট পরিবর্ত প্রভাবকে বলা হয়েছে নির্দিষ্ট পরিবর্ত প্রভাব।[1] দুটি দ্রব্যের মধ্যে নির্দিষ্ট পরিবর্ত প্রভাব আছে কিনা তা নির্ভর করে ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষকের প্রসঙ্গে দ্রব্য দুটির পারস্পরিক সম্পর্কের উপর। এই কারণেই (5·19)-এর মধ্যে নির্দিষ্ট পরিবর্ত প্রভাবের অন্তর্গত রাশি হ'ল U^{ij}। স্বভাবতই, দ্রব্য দুটি উপযোগ অপেক্ষকের প্রসঙ্গে অসম্পর্কিত হ'লে তাদের মধ্যে নির্দিষ্ট পরিবর্ত প্রভাব থাকবে না। সেখানে শুধুমাত্র সাধারণ পরিবর্ত প্রভাব থাকতে পারে। এই কারণে যোগসম্ভব উপযোগ অপেক্ষকের বেলায় নির্দিষ্ট পরিবর্ত প্রভাব অনুপস্থিত।[2]

6. র‍্যাশন ব্যবস্থায় চাহিদা

উপরে আমরা চাহিদা তত্ত্বের যে-আলোচনা করেছি সেখানে ধ'রে নেওয়া হয়েছে যে ভোক্তা তার রুচি-পছন্দ এবং বাজেট সামর্থ্য অনুসারে যে-কোনো দ্রব্যের যে-কোনো পরিমাণ ভোগ করতে পারে। অর্থাৎ, চাহিদার সর্বোচ্চ পরিমাণ সম্পর্কে কোনো আইনগত বাধানিষেধ নেই—ভোক্তার সাম্যাবস্থার প্রয়োজনে সে তার চাহিদার পরিমাণ নির্ধারণ করে। র‍্যাশনিং

---

1 নির্দিষ্ট পরিবর্ত প্রভাব এবং সাধারণ পরিবর্ত প্রভাব এই নামকরণ হাউথেকারের বটে, তবে ধারণা দুটি হিক্‌স্‌-এর *Value and Capital*-এও পাওয়া যায়। পরিবর্তনীয়তার এই দুটি প্রসঙ্গ সম্বন্ধে যে হিক্‌স্‌ সচেতন ছিলেন তার স্পষ্ট ইঙ্গিত তাঁর রচনার মধ্যে আছে। এই প্রসঙ্গে দ্রঃ J. R. Hicks—*Value and Capital*, ২য় সংস্করণ, পৃঃ 46-47।

2 এই বক্তব্যের পূর্ণতর উপস্থাপনার জন্য দ্রঃ H. S. Houthakker—Additive Preferences [*Econometrica*, 1960]

প্রথার বাধানিষেধ আরোপ করলে ভোক্তার সাম্যাবস্থায় কি পরিবর্তন হবে তাই আমাদের বর্তমান অংশের আলোচ্য। র‍্যাশনিং প্রথার মূল কথা হ'ল এই যে আইনগত বাধানিষেধের ফলে র‍্যাশনের আওতাভুক্ত দ্রব্যের চাহিদার সর্বোচ্চ পরিমাণ নির্দিষ্ট ক'রে দেওয়া থাকবে। ভোক্তার চাহিদার পরিমাণ ঐ সর্বোচ্চ পরিমাণের চেয়ে কম বা তার সমান হবে।

মনে করা যাক i-তম দ্রব্য যদি র‍্যাশনের আওতাভুক্ত হয় তাহলে তার সর্বোচ্চ আইনগত পরিমাণ R_i। সেক্ষেত্রে ভোক্তার সাম্যাবস্থা নির্ধারণের জন্য বাজেট শর্ত ছাড়াও আর একটি শর্ত পালন করা প্রয়োজন। এই নতুন শর্ত হ'লঃ

$$R_i \geqslant x_i$$

অথবা

$$R_i = x_i + S_i \text{।} \qquad \ldots(6\cdot1)$$

এখানে x_i হ'ল i-তম দ্রব্যের চাহিদা এবং S_i হ'ল এমন একটি নতুন চল যার জন্য

$$S_i \geqslant 0 \text{।} \qquad \ldots(6\cdot2)$$

$S_i=0$ হ'লে ভোক্তার i-তম দ্রব্যের চাহিদা আইনগত সর্বোচ্চ পরিমাণের সঙ্গে সমান এবং $S_i > 0$ হ'লে ঐ দ্রব্যের চাহিদা সর্বোচ্চ পরিমাণের চেয়ে কম। গাণিতিক প্রোগ্রামিং-এর ভাষায় S_i-কে বলে **স্ল্যাক্ চল।**

ভোক্তার সাম্যাবস্থার সমস্যাটি তাহলে দাঁড়াল বাজেট শর্ত এবং (6·1) ও (6·2)-এর শর্তসাপেক্ষে উপযোগ অপেক্ষক $U = U(x_1, \ldots, x_n)$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়। এ ক্ষেত্রের লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হবে

$$L = U(x_1, \ldots, x_n) + \lambda[M - \Sigma p_i x_i] + \lambda_i \ (R_i - x_i - S_i)$$
$$S \geqslant 0 \qquad \ldots(6\cdot3)$$

অতএব ভোক্তার সাম্যাবস্থার শর্তাবলি হবে

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = U_j - \lambda p_j = 0 \ \ (j \neq i) \qquad \ldots(6\cdot4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = U_i - \lambda p_i - \lambda_i = 0 \qquad \ldots(6\cdot5)$$

(6.4)-এর শর্তাবলি হ'ল র‍্যাশনের আওতার বাইরের দ্রব্যাদির জন্য; র‍্যাশনের আওতাভুক্ত দ্রব্যাদির জন্য প্রাসঙ্গিক শর্তাবলি হ'ল (6·5)। এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে (6·4) এবং (6·5)-এর সমীকরণগুলির সমাধান থেকে কিন্তু ভোক্তার সাম্যাবস্থার পূর্ণাঙ্গ নির্ধারণ সম্ভব নয়। কারণ বর্তমানে ভোক্তার পক্ষে S_i-এর মানও নির্ধারণযোগ্য। অতএব S_i-এর

পরিবর্তনজনিত L-এর পরিবর্তনও বিবেচনা করতে হবে। S_i-এর পরিবর্তনজনিত ডেরিভেটিভ্ নিলে শর্তগুলি হবে

$$\frac{\partial L}{\partial S_i} = -\lambda_i \leqslant 0, \ \lambda_i S_i = 0 \text{।} \qquad \ldots(6 \cdot 6)$$

S_i যেহেতু অঋণাত্মক চল (দ্রঃ 6 2) তাই প্রাসঙ্গিক শর্ত $\frac{\partial L}{\partial S_i} \leqslant 0$, $\frac{\partial L}{\partial S_i} = 0$ নয়[1]। $(6 \cdot 6)$-এর $\lambda_i S_i = 0$ অংশটি তাৎপর্যপূর্ণ। $S_i > 0$ হ'লে $\lambda_i = 0$ হতেই হবে। অর্থাৎ, ভোক্তার চাহিদা যদি আইনানুসারে প্রাপ্য র‍্যাশনের চেয়ে কম হয় তাহলে $\lambda_i = 0$। আবার $\lambda_i > 0$ হ'লে $S_i = 0$, অর্থাৎ, ভোক্তার চাহিদা র‍্যাশনের পরিমাণের সঙ্গে সমান। $(6 \cdot 4)$ এবং $(6 \cdot 5)$-এর শর্তাবলি থেকে আমরা পাই

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{\lambda p_i + \lambda_i}{\lambda p_j} \text{।} \qquad \ldots(6 \cdot 7)$$

$(6 \cdot 7)$ থেকে এটা স্পষ্ট যে $\lambda_i > 0$ হ'লে $\frac{U_i}{U_j} > \frac{p_i}{p_j}$, অর্থাৎ, i, j তম দ্রব্যের মধ্যেকার প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার দ্রব্য দুটির মূল্যের অনুপাতের চেয়ে বড়। এক্ষেত্রে S_i অবশ্যই শূন্য। কাজেই ভোক্তার চাহিদা র‍্যাশনের পরিমাণের সঙ্গে সমান। কিন্তু $\lambda_i = 0$ হ'লে ভোক্তার চাহিদা এমন হবে যে $U_i/U_j = p_i/p_j$, অর্থাৎ র‍্যাশনিং-এর অনুপস্থিতিতে তার যা চাহিদা হবে তাই। এক্ষেত্রে S_i স্পষ্টত. ধনাত্মক, অতএব, ভোক্তার চাহিদা র‍্যাশনের পরিমাণের চেয়ে কম।

7. যৌগিক দ্রব্যঃ হিক্‌স্-লিওনটিয়েফ্ প্রতিপাদ্য

এ-পর্যন্ত আমরা যে-চাহিদা তত্ত্ব আলোচনা করেছি তার প্রয়োগক্ষেত্র বিভিন্ন 'দ্রব্য'। দ্রব্যের ধারণা তাই আমাদের পক্ষে বিশদভাবে আলোচ্য। দ্রব্যের ধারণা অন্তত দুটি ভিন্ন দিক থেকে আলোচনা করা যায়। আমাদের সমাজে যতো বিভিন্ন দ্রব্য আছে তাদের মধ্যে নানা রকমের চরিত্রগত পার্থক্য লক্ষ্য করা যেতে পারে। এই চরিত্রগত পার্থক্যের জন্যই এক একটি দ্রব্য ভোক্তার এক এক রকমের অভাব পূরণের কাজে লাগে। যেমন,

ধরা যাক পোষাক পরিচ্ছদ ও মোটর গাড়ি। পোষাক পরিচ্ছদ থেকে যে-অভাব পূরণ হয় মোটর গাড়ি থেকে তা হয় না। আবার মোটর গাড়ির প্রয়োজন পোষাক পরিচ্ছদে মেটে না। কাজেই ভোক্তার অভাব পূরণের দৃষ্টিকোণ থেকে দ্রব্যাদির মধ্যে শ্রেণীবিভাগ করা যেতে পারে। এই শ্রেণীবিভাগেও আবার এক একটি শ্রেণীর মধ্যে একই ধরনের অভাব পূরণের জন্য একাধিক দ্রব্য থাকতে পাবে। যেমন, মোটর গাড়ি যে-ধরনের অভাব পূরণ করে, বাইসাইকেল থেকেও অনুরূপ অভাব অন্তত কিছুটা পূরণ হয়। কাজেই এই দুটি দ্রব্য আলাদা বটে; তবে মোটর গাড়ি ও পোষাক পরিচ্ছদ যতোটা আলাদা দ্রব্য, মোটর গাড়ি ও বাইসাইকেল নিশ্চয়ই ততোটা আলাদা নয়। এই দুই দ্রব্যের মধ্যে এক রকমের পরিবর্তনীয়তার সম্পর্ক বর্তমান। পরিবর্তনীয়তার (যথার্থভাবে বলতে গেলে নির্দিষ্ট পরিবর্তনীয়তার) দৃষ্টিকোণ থেকে দ্রব্যাদির মধ্যেকার চারিত্রিক পার্থক্য নির্ণয় করা যেতে পারে।

দ্রব্যাদির চারিত্রিক বিশ্লেষণ ছাড়াও আর এক ধরনের বিশেলষণ সম্ভব। এই বিশেলষণের নাম দেওয়া যেতে পারে অর্থনৈতিক বিশেলষণ। এই দ্বিতীয় দৃষ্টিকোণ থেকে দ্রব্যাদির মধ্যেকার সম্পর্কের ভিত্তি হ'ল দ্রব্যাদির মূল্য। যে-সব দ্রব্যের মূল্যের মধ্যে এক বিশেষ সম্পর্ক বর্তমান ভোক্তার দিক থেকে সেইসব দ্রব্যকে একটি মাত্র দ্রব্য হিসেবে বিবেচনা করা সম্ভব। এই দ্রব্যগুলি চারিত্রিক দিক থেকে আলাদা হতেও পারে। অর্থাৎ কতকগুলি দ্রব্যের মধ্যে চারিত্রিক সম্পর্ক নিরপেক্ষ ভাবেও ভোক্তার দৃষ্টিকোণ থেকে এক অর্থনৈতিক সম্পর্কের অস্তিত্ব সম্ভব।

মনে করা যাক n-সংখ্যক দ্রব্যের জন্য ভোক্তার চাহিদা আমাদের চাহিদা তত্ত্বের পদ্ধতি অনুসারে নির্ধারিত হয়ে গেছে। অর্থাৎ, দ্রব্যাদির নির্দিষ্ট মূল্যে এবং ভোক্তার নির্দিষ্ট আয়ে ঐ n-সংখ্যক দ্রব্যের চাহিদা কতো হবে তা আমাদের জানা আছে। মূল্যাবলি এবং আয়ের পরিবর্তনের ফলে ভোক্তার চাহিদা কিভাবে পরিবর্তিত হবে তাও আমাদের জানা। এখন মনে করা যাক যে ঐ n-সংখ্যক দ্রব্যের কতকগুলির মূল্য আনুপাতিক ভাবে পরিবর্তিত হ'ল। এক্ষেত্রে প্রমাণ করা সম্ভব যে যে-সব দ্রব্যমূল্যের মধ্যে আনুপাতিক সম্পর্ক বর্তমান সেই দ্রব্যগুলিকে এক সঙ্গে একটি দ্রব্য হিসেবে বিবেচনা করলেও ভোক্তার চাহিদা সম্পর্কিত সব সিদ্ধান্তই অপরিবর্তিত থাকবে। অর্থাৎ, মূল্য পরিবর্তন আনুপাতিক হ'লে একাধিক দ্রব্যকে একই দ্রব্য হিসেবে বিবেচনা করা চলে। ভোক্তার দৃষ্টিকোণ থেকে এই দ্রব্যটিকে বলা যেতে পারে **যৌগিক দ্রব্য**। ভাসিলি লিওনটিয়েফ্-

এর 1936 সালের গবেষণা পত্রে যৌগিক দ্রব্যের প্রতি প্রথম দৃষ্টি আকর্ষণ করা হয়।[1] পরে 1939-এ হিক্‌স্‌-এর *Value and Capital*-এ এই যৌগিক দ্রব্যের বিষয়ে বিশদভাবে আলোচনা করা হয়। এই প্রসঙ্গের মূল প্রতিপাদ্যটিকে তাই বলা যেতে পারে হিক্‌স্‌-লিওনটিয়েফ্‌ প্রতিপাদ্য।

যৌগিক দ্রব্যের প্রসঙ্গে আমাদের প্রথম সমস্যা হ'ল দ্রব্যটির পরিমাপ সম্পর্কে। মনে করা যাক আলোচ্য যৌগিক দ্রব্যের মধ্যে চরিত্রগত অর্থে m-সংখ্যক ভিন্ন দ্রব্য আছে। সেক্ষেত্রে যৌগিক দ্রব্যটির পরিমাণ পরিমাপের জন্য অন্তত তিনটি পদ্ধতি নির্দেশ করা চলে।

I. যৌগিক দ্রব্যের পরিমাণ

$$q=q_1+\ \dots\ +q_m; \qquad \dots (7\cdot1)$$

এখানে $q_1, \dots, q_m$ হ'ল আলোচ্য যৌগিক দ্রব্যের অন্তর্গত ভিন্ন ভিন্ন দ্রব্যের পরিমাণ।

II. যৌগিক দ্রব্যের পরিমাণ

$$q^*=w_1q_1+\ \dots\ w_mq_m,\ w_i>0; \qquad \dots (7\cdot2)$$

এখানে q^* হ'ল অন্তর্গত দ্রব্যের ভারযুক্ত যোগফল।

III. যৌগিক দ্রব্যের পরিমাণ নির্দেশ করার জন্য মোট ব্যয়-নির্ভর একটি তৃতীয় পরিমাপও নির্দেশ করা চলেঃ

মনে করা যাক

$$E=e_1+\ \dots\ +e_m$$
$$=p_1q_1+\ \dots\ +p_mq_m। \qquad \dots (7\cdot3)$$

এখানে E হ'ল যৌগিক দ্রব্যের উপর মোট ব্যয় এবং e-গুলি হ'ল অন্তর্গত দ্রব্যাদির উপর ব্যয়। এই তৃতীয় পরিমাপ অনুসারে যৌগিক দ্রব্যের পরিমাণ

$$x_o=\frac{E}{p_1}=q_1+\frac{p_2}{p_1}q_2+\ \dots\ +\frac{p_m}{p_1}q_m$$

এবং মূল্য $p_o=p_1$।

---

1 W. Leontief—Composite commodities and the problem of index numbers [*Econometrica*, Vol. 4, No. 1, 1936] এই প্রসঙ্গে আরো দ্রঃ H. Staehle—A development of the economic theory of price index numbers [*Review of Economic Studies*, 1935].

প্রতিপাদ্য 7.1 (হিক্‌স্‌-লিওনটিয়েফ্‌)

মনে করা যাক $x_1, \ldots, x_n$ এই n-সংখ্যক দ্রব্যের মধ্যে প্রথম m-সংখ্যক ($m<n$) দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তন আনুপাতিক। সেক্ষেত্রে $x_1, \ldots, x_m$ এই দ্রব্যগুলিকে একটি মাত্র যৌগিক দ্রব্য হিসেবে গ্রহণ করা সম্ভব।

প্রতিপাদ্যটি প্রমাণের আগে এর একটু ব্যাখ্যা করা প্রয়োজন। $x_1, \ldots, x_m$ দ্রব্যগুলিকে আমরা কি অর্থে একটি মাত্র দ্রব্য হিসেবে গ্রহণ করতে পারি? হিক্‌স্‌-এর ব্যাখ্যা থেকে এই প্রশ্নের একটি উত্তর আমরা পাই। $x_1, \ldots, x_m$ দ্রব্যগোষ্ঠীর মূল্য যদি আনুপাতিকভাবে পরিবর্তিত হয়ে থাকে তাহলে দ্রব্যগোষ্ঠীর মোট চাহিদার পরিমাণের উপর তার প্রভাব যে-কোনো একটি দ্রব্যের মূল্য পরিবর্তনের ফলে সেই দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণের উপর প্রভাবের অনুরূপ।

প্রতিপাদ্যের প্রমাণঃ—

r-তম দ্রব্যের আনুপাতিক মূল্য পরিবর্তনের ফলে s-তম দ্রব্যের চাহিদা পরিবর্তনের অর্থমূল্য $p_r p_s \dfrac{\partial x_s}{\partial p_r}$ । স্লুট্‌স্কীর সমীকরণ থেকে আমরা জানি

$$\frac{\partial x_s}{\partial p_r} = S_{rs} - x_r \frac{\partial x_s}{\partial M}\ ; \qquad \ldots \quad (7.4)$$

অতএব,

$$p_r p_s \frac{\partial x_s}{\partial p_r} = p_r p_s S_{rs} - p_r x_r p_s \frac{\partial x_s}{\partial M} \qquad \ldots \quad (7.5)$$

মনে করা যাক $x_1, \ldots, x_m$ ($m<n$) এই দ্রব্যগুলির মূল্য আনুপাতিকভাবে পরিবর্তিত হ'ল। সেক্ষেত্রে এই দ্রব্যগুলির যে-কোনো একটি, ধরা যাক s-তম, দ্রব্যের চাহিদা পরিবর্তনের অর্থমূল্য হবেঃ

$$\sum_{r=1}^{m} p_r p_s \frac{\partial x_s}{\partial p_r} = \sum_{r=1}^{m} p_r p_s S_{rs} - \left(\sum_{r=1}^{m} p_r x_r\right) p_s \frac{\partial x_s}{\partial M} \quad (7.6)$$

(7.6)-কে আর একবার $s=1, \ldots, m$-এর জন্য যোগ করলে আমরা $x_1, \ldots, x_m$ দ্রব্যগোষ্ঠীর মোট চাহিদার পরিবর্তনের অর্থমূল্য পাবঃ

$$\sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} p_r p_s \frac{\partial x_s}{\partial p_r} = \sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} p_r p_s S_{rs} - \left(\sum_{r=1}^{m} p_r x_r\right)\left(\sum_{s=1}^{m} p_s \frac{\partial x_s}{\partial M}\right) \quad \ldots, \quad (7.7)$$

(7.7) -এর সমীকরণ (7.5) -এর অনুরূপ। অতএব (7.5) -এর অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা (7.7) -এর বেলাতেও প্রযোজ্য।

উপরের প্রমাণ থেকে দেখা গেল যে $x_1, \ldots, x_m$ এই দ্রব্যগুলিকে আমরা একটি মাত্র দ্রব্য (যৌগিক দ্রব্য) হিসেবে গ্রহণ করতে পারি। এই যৌগিক দ্রব্যের পরিমাণ $x_c = x_1 + \frac{p_2}{p_1}x_2 + \ldots, + \frac{p_m}{p_1}x_m$ এবং মূল্য $p_c = p_1$। যৌগিক দ্রব্য প্রতিপাদ্যের সাহায্যে ভোক্তার ভোগ্য দ্রব্যগুলিকে স্বল্পসংখ্যক দ্রব্যগোষ্ঠীতে বিন্যস্ত করা যায়। চাহিদা তত্ত্বের বিশ্লেষণে এই সরলীকরণ হিক্‌স্‌-লিওনটিয়েফ্‌ প্রতিপাদ্যের অন্যতম তাৎপর্য।[1]

8. মূল্যনির্ভর উপযোগ অপেক্ষক

আমরা এ পর্যন্ত যে-চাহিদা তত্ত্বের আলোচনা করেছি তার মূল ভিত্তি হ'ল ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষক। এই উপযোগ অপেক্ষকের স্বাধীন চলগুলি হ'ল ভোক্তার ভোগ্য দ্রব্যসমষ্টি। লক্ষণীয় যে এই আলোচনায় উপযোগ অপেক্ষকের মান নির্ভর করে শুধুমাত্র দ্রব্যসমষ্টির পরিমাণের উপর, দ্রব্যাদির মূল্যের উপর নয়। অর্থাৎ, ভোক্তা কোনো বিশেষ দ্রব্য কোন মূল্যে কিনতে পারবে তার উপর ঐ দ্রব্য থেকে প্রাপ্য উপযোগ নির্ভর করে না। যে-কোনো দ্রব্যের থেকে প্রাপ্য উপযোগ নির্ভর করে ঐ দ্রব্যের ভোগ্য পরিমাণের উপর। বর্তমান অংশে আমরা উপযোগ অপেক্ষককে কিছুটা পরিবর্তিত রূপে গ্রহণ করে ভোক্তার চাহিদার ধর্ম বিশ্লেষণ করব। এই পরিবর্তিত রূপে মনে করা হবে যে উপযোগ অপেক্ষকের মান শুধুমাত্র দ্রব্যসমষ্টির পরিমাণ নয়, দ্রব্যাদির মূল্যের উপরেও নির্ভরশীল। অর্থাৎ, এমন হতে পারে যে কোনো দ্রব্যের কোনো নির্দিষ্ট পরিমাণ থেকে ভোক্তা

1 এই প্রতিপাদ্যের একটি বিকল্প ব্যাখ্যা এবং বিভিন্ন ক্ষেত্রে এর প্রয়োগের জন্য দ্রঃ H. A. J. Green—*Consumer theory* [Penguin].

যে উপযোগ পাবে তা দ্রব্যটি কোন মূল্যে কেনা হবে তার উপরেও নির্ভর করে। ভোক্তা যদি মনে করে যে মূল্যবান দ্রব্য ভোগ করলে তার তৃপ্তি তুলনায় বেশি তাহলে তার উপযোগের পরিমাণ দ্রব্যের পরিমাণ ছাড়াও দ্রব্যের মূল্যের উপরেও নির্ভরশীল হ'ল। 1968 সালে প্রকাশিত এক গবেষণা পত্রে পি· জে· কালমান[1] প্রথম মূল্যনির্ভর উপযোগ অপেক্ষকের বিশ্লেষণ করেন। এই বিশ্লেষণের অন্যতম প্রধান তাৎপর্য হ'ল সাধারণ দ্রব্যের ক্ষেত্রেও চাহিদা অপেক্ষকের স্লোপ যে ঋণাত্মক হবেই তা আর জোর করে বলা চলে না।

মনে করা যাক E হ'ল $2n$-মাত্রিক একটি ইউক্লিডীয় স্পেস। এই স্পেসের যে-কোনো বিন্দু $x=(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n)$। এই q-গুলি হ'ল দ্রব্যের পরিমাণ এবং p-গুলি হ'ল দ্রব্যের মূল্য। স্পষ্টত, x একটি $2n$-মাত্রিক ভেক্টর। E-স্পেসের নাম দেওয়া যাক **দ্রব্য-মূল্য স্পেস**। আমাদের বিবেচ্য স্পেস হ'ল এই দ্রব্য-মূল্য স্পেসের সেই অংশ যেখানে $q_i \geqslant 0$ এবং $p_i > 0$ $(i=1, \ldots, n)$। অর্থাৎ, মনে করা যাক,

$$\bar{E} \subset E$$

এবং

$$\bar{E} = \{x | q_i \geqslant 0,\ p_i > 0,\ i=1,\ \ldots,\ n\}।$$

এই $\bar{E}$ হ'ল আমাদের বিবেচ্য দ্রব্য-মূল্য স্পেস।

দ্রব্যসমষ্টি স্পেসের উপর ভোক্তার পছন্দ সম্পর্ক বা তার উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব এবং গুণাবলি সংক্রান্ত যে-সব অঙ্গীকার আগে করা হয়েছে বর্তমানের দ্রব্য-মূল্য স্পেস $\bar{E}$-এর উপরেও তার সবগুলো ধরে নেওয়া হচ্ছে। উপরন্তু, দ্রব্যমূল্যের সঙ্গে উপযোগের সম্পর্ক নির্দেশ করবার জন্য একটি বাড়তি অঙ্গীকার এখানে ব্যবহার করা হবে। এই অঙ্গীকারের মর্ম হ'ল এই যে দ্রব্যমূল্য বাড়লে ভোক্তার উপযোগও বাড়ে। বর্তমান প্রসঙ্গে আমাদের অঙ্গীকারগুলি নিচে দেওয়া হ'লঃ

1. $\bar{E}$-এর অন্তর্ভুক্ত সব x, y-এর জন্য

$$xPy,\ yPx,\ xIy$$

এই তিনটি সম্ভাবনার একটি মাত্র সিদ্ধ হবে।

II. $\bar{E}$-এর উপরে প্রকৃত মান সম্পন্ন একটি উপযোগ অপেক্ষক $U(x)$-এর অস্তিত্ব আছে। এই উপযোগ অপেক্ষকের দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভ্ $U_{ij}(x)$, $i, j=1, \ldots, 2n$ নিরবচ্ছিন্ন। উপরন্তু, $\bar{E}$-এর অন্তর্ভুক্ত সব x, y-এর জন্য $U(x) > U(y) \leftrightarrow xPy$।

III. ভোক্তা প্রতিটি দ্রব্যে অসম্পৃক্তঃ $Uq_i(x) > 0$, $i=1, \ldots, n$। মূল্য বাড়লে উপযোগ বাড়েঃ $Up_i(x) \geqslant 0$, $i=1, \ldots, n$ এবং অন্তত একটি i-এর জন্য অসমান চিহ্ন সিদ্ধ।

ভোক্তার সমস্যা হ'ল বাজেট শর্তসাপেক্ষে উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান লাভ। বর্তমানের বাজেট শর্ত আগের মতোইঃ

$$M = \sum_{i=1}^{m} p_i q_i \text{।}$$

বর্তমানের উপযোগ অপেক্ষক $U(x) = U(q, p)$। এখানে q এবং p দুইই n-মাত্রিক ভেক্টর। লক্ষ্য করা দরকার যে বর্তমানের উপযোগ অপেক্ষক যদিও p-নির্ভর, তবুও এই রাশিগুলির মান কিন্তু ভোক্তার ইচ্ছা সাপেক্ষ নয়; অর্থাৎ, ভোক্তার দৃষ্টিকোণ থেকে মূল্যাবলি আগের মতোই প্যারামিটার এবং ভোক্তাকে উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মানে পৌঁছবার জন্য শুধুই দ্রব্যের পরিমাণ উপযুক্তভাবে নির্বাচন করতে হবে। অতএব, 'ভোক্তার সাম্যাবস্থা নির্ধারণের জন্য পরিবর্তনীয় চল শুধু $q_i (i=1, \ldots, n)$।

এক্ষেত্রে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হ'লঃ

$$L = U(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) + \lambda[M - p_1q_1 - \ldots - p_nq_n] \text{।}$$

সাম্যাবস্থার শর্তাবলি হ'লঃ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_i} &= U_{q_i}(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) - \lambda p_i = 0 \\ &\qquad (i=1, \ldots, n) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= M - p_1q_1 - \ldots - p_nq_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(8\cdot1)$$

(1.8)-এর অনুরূপ দ্বিতীয় পর্যায়ের শর্ত হ'লঃ

$$(-1)^n \begin{vmatrix} Uq_{11}(q,p) \ldots\ldots U_{q1n}(q,p)\, p_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{qn1}(q,p) \ldots U_{q_{nn}}(q,p)\, p_n \\ p_1 \quad \ldots \quad p_n \quad O \end{vmatrix} > 0 \quad \ldots(8\cdot2)$$

(8.1)-এর ব্যবস্থায় মোট সমীকরণের সংখ্যা $(n+1)$ এবং অন্তর্ভুক্ত মোট রাশির সংখ্যা $2(n+1)$। আগের মতোই নিহিত অপেক্ষক প্রতিপাদ্যের সাহায্যে এই ব্যবস্থা থেকে n-সংখ্যক চাহিদা অপেক্ষক পাওয়া যাবেঃ

$$q_i = f^i(p, M) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \ldots(8\cdot3)$$

তুলনামূলক স্থিতাবস্থাঃ দুটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে

মাত্র দুটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে আমাদের উপযোগ অপেক্ষক হ'লঃ

$$U = U(q_1, q_2;\ p_1, p_2) \qquad \ldots(8\cdot4)$$

লিখবার সুবিধার জন্য এই চারটি রাশিকে আমরা যথাক্রমে 1, 2, 3, 4 এই ভাবে নির্দেশ করব। সেক্ষেত্রে আমাদের আংশিক ডেরিভেটিভ্‌গুলি U_{ij} হিসাবে প্রকাশ করা যাবে। মনে রাখতে হবে যে i বা j-এর মান 3, 4 হ'লে U_{ij} যথাক্রমে p_1, p_2-এর পরিবর্তনজনিত ডেরিভেটিভ্‌ বোঝাবে।

দুটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে সাম্যাবস্থার সমীকরণগুলি হবেঃ

$$\left.\begin{aligned} U_1(q_1, q_2, p_1, p_2) - \lambda p_1 &= 0 \\ U_2(q_1, q_2, p_1, p_2) - \lambda p_2 &= 0 \\ M - p_1q_1 - p_2q_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(8\cdot5)$$

(8.5)-এর পূর্ণ ডিফারেনশিয়াল নিলে আমরা পাই

$$\left.\begin{aligned} U_{11}\, dq_1 + U_{12}\, dq_2 - p_1 d\lambda &= (\lambda - U_{13})\ dp_1 - U_{14}\, dp_2 \\ U_{21}\, dq_1 + U_{22}\, dq_2 - p_2\, d\lambda &= -U_{23}\, dp_1 + (\lambda - U_{24}) dp_2 \\ -p_1 dq_1 - p_2 dq_2 &= q_1\, dp_1 + q_2\, dp_2 - dM \end{aligned}\right\} \ldots(8\cdot6)$$

(8.6) থেকে dq_1 এবং dq_2-এর জন্য সমাধান করলে পাওয়া যায়ঃ

$$dq_1 = \frac{1}{D}\left[\begin{aligned} &\{(\lambda - U_{13})dp_1 - U_{14}\, dp_2\}D_{11} + \{(\lambda - U_{24})dp_2 - \\ &-U_{23}\ dp_1\}D_{21} + (q_1dp_1 + q_2dp_2 - dM)D_{31} \end{aligned}\right] \qquad \ldots(8\cdot7)$$

$$dq_2 = \frac{1}{D}\left[\begin{aligned} &\{(\lambda - U_{13})dp_1 - U_{14}dp_2\}D_{12} + \{(\lambda - U_{24})dp_2 - \\ &U_{23}dp_1\}D_{22} + (q_1dp_1 + q_2dp_2 - dM)D_{32} \end{aligned}\right]; \qquad \ldots(8\cdot8)$$

এখানে

$$D = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & -p_1 \\ U_{21} & U_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

এবং D_{ij} হ'ল D-এর i, j-তম কোফ্যাক্টর।

প্রথম দ্রব্যের মূল্য p_1 পরিবর্তিত হ'লে q_1-এর সাম্যমানের উপর তার যে-প্রভাব হবে তা নির্ণয় করার জন্য $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$-এর মান নির্ধারণ করা প্রয়োজন। $dp_2 = dM = 0$ ধরে নিয়ে (8.7)-এর দুদিকে dp_1 দিয়ে ভাগ করলে আমরা পাইঃ

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{1}{D}[(\lambda - U_{13})D_{11} - U_{23}D_{21} + q_1 D_{31}]। \qquad \ldots(8 \cdot 9)$$

একই রকমভাবে $dp_1 = dp_2 = 0$ ধরে নিয়ে (8.7)-কে dM দিয়ে ভাগ করলে আমরা পাইঃ

$$\frac{\partial q_1}{\partial M} = -\frac{D_{31}}{D} \qquad \ldots(8 \cdot 10)$$

(8.10)-কে (8.9)-এর মধ্যে বসালে

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{(\lambda - U_{13})D_{11}}{D} - \frac{U_{23}D_{21}}{D} - q_1 \frac{dq_1}{dM} \qquad \ldots(8 \cdot 11)$$

(8.11) হ'ল বর্তমান ক্ষেত্রের একটি স্লুট্স্কী সমীকরণ। লক্ষণীয় যে এই সমীকরণ থেকে $\frac{\partial q_1}{\partial p_1}$ -এর চিহ্ন সম্বন্ধে কিন্তু কোনো স্পষ্ট সিদ্ধান্তে পৌঁছনো যাচ্ছে না। আলোচ্য দ্রব্যটি যদি সাধারণ দ্রব্যও হয় তাহলে যেহেতু $\frac{\partial q_1}{\partial M} > 0$, শুধুমাত্র তৃতীয় পদটির চিহ্ন নির্ধারিত হচ্ছে। কিন্তু প্রথম দুটি পদের চিহ্ন সম্বন্ধে কোনো সাধারণ বাধানিষেধ নেই বলে সাধারণ দ্রব্যের ক্ষেত্রেও চাহিদা অপেক্ষকের স্লোপ সম্বন্ধে কোনো সিদ্ধান্ত পাওয়া যাচ্ছে না।

উপরের পদ্ধতি অনুসরণ করে আলোচ্য ক্ষেত্রের বাকি তিনটি স্লুট্স্কী সমীকরণও লেখা যেতে পারে।

বর্তমান পরিচ্ছেদে আমরা সাধারণ সাম্যাবস্থার পদ্ধতি অনুসরণ করে ভোক্তার চাহিদা বিশ্লেষণ করলাম। সাধারণ সাম্যাবস্থার মূল কথা এই-যে ভোক্তা যতোগুলি দ্রব্যের মধ্যে তার মোট আয় বণ্টন করে তার সবগুলির মান এক সঙ্গে নির্ধারণ করতে হবে। ভোক্তার স্থিতিসাম্যের ভিত্তিতে

এই সাম্য মানগুলি নির্ধারণ করা সম্ভব। নির্ধারিত সাম্য মানগুলি দ্রব্যাদির মূল্য এবং ভোক্তার আয়ের উপর নির্ভরশীল। এই প্যারামিটার-গুলির পরিবর্তনজনিত দ্রব্যাদির চাহিদার যে-পরিবর্তন তা তুলনামূলক স্থিতাবস্থার পদ্ধতিতে নির্ণয় করা সম্ভব। তুলনামূলক স্থিতাবস্থার পদ্ধতি প্রয়োগ করে আমরা তাই ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের বিভিন্ন এম্পিরিকাল গুণাবলি পেতে পারি। স্থিতিসাম্য এবং চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয়ে উত্তল-তার ভূমিকা বর্তমান পরিচ্ছেদে বিশেষভাবে আলোচনা করা হয়েছে।

সাধারণ সাম্যাবস্থার আলোচনায় দ্রব্যাদির মধ্যেকার পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার সম্পর্ক বিশেষ উল্লেখযোগ্য। এই ধারণাগুলির বিশ্লেষণ ও স্পষ্ট সংজ্ঞা নির্দেশ করা হয়েছে। পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার সম্পর্ক ছাড়াও দ্রব্যাদির মধ্যে মূল্য প্রাসঙ্গিক আর এক ধরনের সম্পর্ক থাকতে পারে। এরই ভিত্তিতে যৌগিক দ্রব্যের ধারণাটি গড়ে তোলা সম্ভব। হিক্স্-লিওনটিয়েফ্ প্রতিপাদ্যে এই যৌগিক দ্রব্যের চরিত্র নির্ণয় করা হয়েছে।

র‍্যাশনিং ব্যবস্থায় চাহিদা এবং মূল্যনির্ভর উপযোগ অপেক্ষকের ক্ষেত্রে ভোক্তার চাহিদা নির্ণয় এই দুটি বিশেষ প্রসঙ্গও বর্তমান পরিচ্ছেদে আলোচনা করা হয়েছে।

পঞ্চম পরিচ্ছেদ

গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্ব

1. গোচরীভূত পছন্দের ভূমিকা

ভোক্তার চাহিদা সম্পর্কিত আচরণ বিশ্লেষণ করতে গিয়ে প্রচলিত তত্ত্বে কল্পনা করা হয় যে ভোক্তা যেন তার অন্তর্নিহিত উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের উদ্দেশ্যে দ্রব্যাদির চাহিদা নির্ধারণ করে। সাধারণ ভাবে এই দৃষ্টিভঙ্গির নাম দেওয়া যেতে পারে নিওক্ল্যাসিকাল দৃষ্টি-ভঙ্গি। এই নিওক্ল্যাসিকাল দৃষ্টিভঙ্গি অনুসরণ করে ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষকের ভিত্তি নির্মাণ করা চলে। আমরা দেখেছি যে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের একটি নির্দিষ্ট গঠনগত বৈশিষ্ট্য থাকলে তবে তাকে উপযোগ অপেক্ষকের ভিত্তি হিসেবে গ্রহণ করা যায়। পছন্দ সম্পর্কের যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ যদি সম্ভব হয়, তাহলে নিওক্ল্যাসিকাল চাহিদা তত্ত্বে নির্ধারিত চাহিদা অপেক্ষককে পছন্দ সম্পর্ক থেকে উৎসারিত বলেও বর্ণনা করা যেতে পারে। চাহিদা অপেক্ষকের বিভিন্ন এম্পিরিকাল ধর্ম যা নির্ধারণ করা হয়েছে তাও ভোক্তার পছন্দ-কাঠামোর উপর নির্ভরশীল।

ভোক্তার চাহিদা সম্পর্কিত আচরণ বিশ্লেষণে গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্ব হ'ল আর একটি বিকল্প ব্যাখ্যা। এই ব্যাখ্যায় পছন্দ সম্পর্কের বদলে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের কিছু নির্দিষ্ট গুণাবলিকেই ভিত্তি হিসেবে গ্রহণ করা হয়। এই নতুন দৃষ্টিভঙ্গিতে ভোক্তার অন্তর্নিহিত কোনো পছন্দ সম্পর্ক বা উপযোগ অপেক্ষকের কল্পনা করার প্রয়োজন পড়ে না। এখানে মনে করা হয় যে ভোক্তা বাজারে নির্দিষ্ট মূল্যাবলি এবং আয়ের পরিপ্রেক্ষিতে বিভিন্ন দ্রব্যের বিভিন্ন পরিমাণ নির্বাচন করে। এই নির্বাচনগুলি ভোক্তার কল্পিত চাহিদা অপেক্ষকের এক একটি বিন্দু। গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বে এই নির্বাচন সংক্রান্ত কিছু স্বীকার্য সরাসরি ধরে নেওয়া হয়। এই স্বীকার্যগুলি গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের ভিত্তি। এই তত্ত্বের মূল প্রতিপাদ্য বিষয় হ'ল ভোক্তার নির্বাচন সংক্রান্ত স্বীকার্যের ভিত্তিতে তার চাহিদা অপেক্ষকের প্রচলিত এম্পিরিকাল গুণাবলি নির্ধারণ করা।

এই শতকের তৃতীয়-চতুর্থ দশকে পি. এ. স্যামুয়েলসনের কয়েকটি উল্লেখযোগ্য গবেষণা পত্রের মধ্যে গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের সূত্রপাত।

পরবর্তী অর্থনীতিবিদ্‌দের গবেষণায় এই তত্ত্বের অনেক প্রসার ঘটেছে। এঁদের মধ্যে অন্যতম এইচ· এস· হাউথেকার ও এইচ· উজাওয়া। স্যাম্‌য়েলসন্ উদ্ভাবিত গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের ক্ষেত্রে এরকম মনে করা হয়েছিল যে পছন্দ সম্পর্কের কল্পনা ভোক্তার চাহিদা বিশ্লেষণে অবান্তর। কারণ, পছন্দ সম্পর্ক বা উপযোগ অপেক্ষকের ধারণা ছাড়াই তো চাহিদা অপেক্ষকের প্রয়োজনীয় গুণাবলি নির্ধারণ করা সম্ভব হচ্ছে। কিন্তু পঞ্চাশের দশকে হাউথেকারের বিশ্লেষণের ফলে দেখা যাচ্ছে যে গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের ভিত্তি ও নিওক্ল্যাসিকাল তত্ত্বের ভিত্তি ন্যায়তাত্ত্বিক বিচারে মূলত তুল্যমূল্য। কারণ, প্রমাণ করা সম্ভব যে উপযোগ অপেক্ষক ধরে নিলে গোচরীভূত পছন্দের স্বীকার্য পাওয়া যায়; আবার গোচরীভূত পছন্দের স্বীকার্য ধরে নিলে উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব প্রমাণ করা সম্ভব। অতএব, নিওক্ল্যাসিকাল পছন্দ সম্পর্ক বা অপেক্ষকের অবান্তরতার যুক্তি গ্রাহ্য হচ্ছে না।

হাউথেকারের বিশ্লেষণে ব্যবহৃত গোচরীভূত পছন্দের স্বীকার্য স্যাম্‌য়েলসন্ প্রস্তাবিত স্বীকার্যের তুলনায় বেশি বিস্তৃত। অন্তত আপাতদৃষ্টিতে এই দুই স্বীকার্য এক নয়। তবে পরবর্তীকালে ষাটের দশকে উজাওয়ার গবেষণায় এই দুই স্বীকার্যের তুল্যমূল্যতার বিশ্লেষণ করা হয়েছে। এবং প্রমাণ করা সম্ভব হয়েছে যে চাহিদা অপেক্ষকের উপর প্রযোজ্য একটি বাড়তি নিয়মিত শর্ত ধ'রে নিলে স্যাম্‌য়েলসন্ এবং হাউথেকারের স্বীকার্যও তুল্যমূল্য। এই উল্লেখযোগ্য গবেষণাগুলির মধ্য দিয়ে নিওক্ল্যাসিকাল ও গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের দূরত্ব অনেক কমে এসেছে।

2. মূল ধারণা এবং স্বীকার্যাবলি

মনে করা যাক $x_1, \ldots, x_n$ হ'ল n-সংখ্যক দ্রব্যের পরিমাণ এবং $p_1, \ldots, p_n$ হ'ল যথাক্রমে এই দ্রব্যগুলির বাজার মূল্য। মনে করা যাক $p_i^0 (i=1, \ldots, n)$ হ'ল যে-কোনো একটি নির্দিষ্ট মূল্য পরিস্থিতি। p_i^0 মূল্য পরিস্থিতিতে ভোক্তা বস্তুত যে-দ্রব্যাদি ক্রয় করে তাদের যদি $x_i^0 (i=1, \ldots, n)$ দিয়ে চিহ্নিত করা যায় তাহলে ভোক্তার মোট ব্যয় দাঁড়ায় $\Sigma p_i^0 x_i^0$। $p^0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$ এবং $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ এই ভেক্টর চিহ্ন ব্যবহার করলে মোট ব্যয়কে $p^0 x^0$ এই ভেক্টর গুণফল হিসেবেও নির্দেশ করা চলে। ভোক্তার মোট ব্যয় যখন $p^0 x^0$ তখন সে ইচ্ছে করলে এই ব্যয়ে প্রাপ্য অন্যান্য সব দ্রব্যসমষ্টি কিনতে পারত। কিন্তু

যেহেতু সে ঐ ব্যয়ে x^0 এই নির্দিষ্ট দ্রব্যসমষ্টি কিনছে তাই আমরা ধরে নিতে পারি যে ভোক্তার এই ক্রয়ের মধ্য দিয়েই সে x^0 দ্রব্যসমষ্টির প্রতি তার এক ধরনের পছন্দ নির্দেশ করছে। এই যে পছন্দের নির্দেশ এর সঙ্গে ভোক্তার অন্তর্নিহিত পছন্দের (যদি কিছু থাকে) কোনো প্রত্যক্ষ যোগ নেই। যে-কোনো দুটি নির্দিষ্ট দ্রব্যসমষ্টির মধ্যে ভোক্তা কোনটিকে পছন্দ করে তা সম্পূর্ণভাবে নির্ভর করছে ভোক্তার বাস্তব আচরণের উপর। ভোক্তা কোন মূল্যাবলিতে কোন দ্রব্যসমষ্টি কিনছে শুধুমাত্র এই তথ্যের ভিত্তিতে আমরা তার পছন্দ নির্ধারণ করতে পারি। এই পছন্দকে নাম দেওয়া যেতে পারে গোচরীভূত পছন্দ।

নিওক্ল্যাসিকাল তত্ত্বের পিছনে ভোক্তার যে-পছন্দ সম্পর্কের কল্পনা তা কিন্তু এই গোচরীভূত পছন্দের থেকে আলাদা। সেই পছন্দকে আমরা যদি নাম দিই অন্তর্নিহিত পছন্দ তাহলে বলা যায় যে ভোক্তার অন্তর্নিহিত পছন্দ আমরা কোনো সময়েই প্রত্যক্ষ করছি না। সেই পছন্দের থেকে উৎসারিত চাহিদা অপেক্ষক বা তার বিভিন্ন অংশ কেবল আমাদের গোচরীভূত হচ্ছে। বর্তমান প্রসঙ্গের যে-পছন্দ তা কিন্তু সরাসরি আমাদের গোচরীভূত। বস্তুত দুটি দ্রব্যসমষ্টির মধ্যে ভোক্তার পছন্দের (অন্তর্নিহিত পছন্দ নয়) বিচারে কি সম্পর্ক তা নির্ভর করছে গাণিতিক হিসাবের উপর। অন্তর্নিহিত পছন্দের মতো এই গোচরীভূত পছন্দকেও আমরা একটি দ্বিনিধানী সম্পর্ক হিসেবে দেখতে পারি। মনে করা যাক R হ'ল গোচরীভূত পছন্দের দ্বিনিধানী সম্পর্ক।

সংজ্ঞা 2.1 দুটি দ্রব্যসমষ্টি x^0 এবং x^1-এর মধ্যে x^0Rx^1 যদি এবং একমাত্র যদি

$$p^0x^0 \geqq p^0x^1 \qquad \ldots(2\cdot1)$$

লক্ষণীয় যে গোচরীভূত পছন্দ R শুধুমাত্র (2.1)-এর গাণিতিক অসমীকরণের সাহায্যেই নির্দেশিত হচ্ছে।

স্যামুয়েলসন্ প্রস্তাবিত গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের ভিত্তি হ'ল এই R-সম্পর্ক এবং সংলগ্ন কয়েকটি স্বীকার্য।

স্বীকার্য 2.1 দ্রব্যসমষ্টি স্পেসের যে-কোনো দুটি দ্রব্যসমষ্টি x^0, x^1-এর জন্য

$$x^0Rx^1 \rightarrow x^1\overline{Rx^0}\,; \qquad \ldots(2\cdot2)$$

এখানে $\overline{R}$ হ'ল R-এর নেতিকরণ। অর্থাৎ, (2.2)-এর তাৎপর্য হ'ল

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0 \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1 < \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^0 \qquad \ldots (2\cdot3)$$

স্বীকার্য (2.1)-এর ফলে ভোক্তার আচরণে এক ধরনের সংগতি লক্ষ্য করা যাবে। ভোক্তা কোনো এক সময়ে x^1 কিনতে পারা সত্ত্বেও যদি x^0 দ্রব্য-সমষ্টি কিনে থাকে তাহলে সে কোনো সময়েই x^0 কিনতে পারলে আর x^1 কিনবে না। অতএব, যে-মূল্য পরিস্থিতিতে তাকে x^1 কিনতে দেখা যাচ্ছে বুঝতে হবে যে সেই মূল্য পরিস্থিতিতে x^0 তার আয়ত্তের বাইরে ছিল। ভোক্তার আচরণের এই মৌল সংগতি গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের ভিত্তি।

স্বীকার্য 2.2 মনে করা যাক (p_i, M) হ'ল ভোক্তার কাছে নির্দিষ্ট কোনো আয়-মূল্য পরিস্থিতি। যে-কোনো আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে ভোক্তা কোনো না কোনো দ্রব্যসমষ্টি নির্বাচন করবেই; এবং যে-কোনো দ্রব্যসমষ্টি কোনো না কোনো আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে নির্বাচিত হবেই।

স্বীকার্য 2.3 যে-কোনো নির্বাচনে ভোক্তা তার আয়ের সবটুকু খরচ করে। অর্থাৎ, $px=M$। বাজেট শর্ত সব সময়েই পুরোপুরি সিদ্ধ।

3. চাহিদা অপেক্ষকের কিছু এম্পিরিকাল গুণাবলি

বর্তমান অংশে শুধুমাত্র স্বীকার্য (2.1)—(2.3)-এর ভিত্তিতে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের কিছু এম্পিরিকাল গুণাবলি নির্ধারণ করা হবে। নিওক্ল্যাসিকাল তত্ত্বের ভিত্তিতে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের সমমাত্রিকতা, ঋণাত্মক স্লোপ ইত্যাদি যে-সমস্ত গুণাবলি আমরা নির্ধারণ করেছি তার সবই বর্তমান গোচরীভূত পছন্দ সম্পর্কের ভিত্তিতেও নির্ধারণ করা যাবে।

প্রতিপাদ্য *3.1* ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষক আয় ও মূল্যাবলিতে শূন্য ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক।

প্রমাণঃ—মনে করা যাক (p_i^0, M^0) একটি নির্দিষ্ট আয়-মূল্য পরিস্থিতি। এই পরিস্থিতিতে নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি মনে করা যাক x_i^0। মনে করা যাক (p_i^1, M^1) এমন একটি নতুন আয়-মূল্য পরিস্থিতি যে $p_i^1=kp_i^0 (i=1, \ldots, n)$ এবং $M^1=kM^0$, $k>0$। এই দ্বিতীয় পরিস্থিতিতে নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি মনে করা যাক x_i^1। আমাদের প্রমাণ করা প্রয়োজন যে $x_i^1=x_i^0 (i=1, \ldots, n)$।

যেহেতু বাজেট শর্ত সব সময়েই পুরোপুরি সিদ্ধ,

$$M^1=\sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1 = kM^0 = k\sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0 \text{।} \qquad \ldots(3\cdot1)$$

দেওয়া আছে যে $p_i^1=kp_i^0\,(i=1,\ \ldots,\ n)$। অতএব, (3.1) থেকে পাচ্ছি যে

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0 \text{।} \qquad \ldots(3\cdot2)$$

(3.2) -এর তাৎপর্য হ'ল এই যে x^0Rx^1। আবার, (3.1) -এর সাহায্যে পাচ্ছি যে

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^0 = k\sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i^0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1 \qquad \ldots(3\cdot3)$$

(3.3) -এর তাৎপর্য হ'ল এই যে x^1Rx^0। স্পষ্টত, (3.2) এবং (3.3) পরস্পর অসঙ্গতিপূর্ণ। অতএব x_i^0 এবং x_i^1 দ্রব্যসমষ্টি দুটি আলাদা হতে পারে না। কাজেই $x_i^0=x_i^1\,(i=1,\ \ldots,\ n)$। [Q.E.D]

অনুসিদ্ধান্ত ঃ—চাহিদা অপেক্ষকের সমমাত্রিকতার ধর্ম থেকে সরাসরি পাওয়া যাচ্ছে যে এই অপেক্ষক একমান বিশিষ্ট। $k=1$-এর জন্য স্পষ্ট দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে একটি নির্দিষ্ট আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে ভোক্তার নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি একটিই হবে। অর্থাৎ স্বাধীন চলগুলির যে-কোনো নির্দিষ্ট মানে ভোক্তার নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি একাধিক হবে না।

প্রতিপাদ্য 3.2 মনে করা যাক $\beta_i=p_i^0/p_1^0\,(i=1,\ \ldots,\ n)$ এবং x_i^0 হ'ল p_i^0 মূল্যাবলিতে নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি। সেক্ষেত্রে

$$\sum_{i=2}^{n} \Delta\beta_i\, \Delta x_i^0 < 0$$

প্রমাণ ঃ—মনে করা যাক

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^1 p_i^0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 p_i^0 \text{।} \qquad \ldots(3\cdot4)$$

অর্থাৎ, x^0Rx^1। অতএব, $x^1\bar{R}x^0$। অর্থাৎ,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^1x_i^1 < \sum_{i=1}^{n} p_i^1x_i^0 \text{।} \qquad \ldots(3\cdot5)$$

মনে করা যাক

$$x_i^1=x_i^0+\Delta x_i^0 \qquad \ldots(3\cdot6)$$

$$p_i^1=p_i^0+\Delta p_i^0 \qquad \ldots(3\cdot7)$$

অতএব, (3.4) এবং (3.5) -কে (3.6) এবং (3.7) -এর সাহায্যে লেখা যেতে পারে

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^0+\Delta x_i^0)p_i^0=\sum_{i=1}^{n} x_i^0p_i^0 \qquad \ldots(3\cdot8)$$

$$\longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i^0+\Delta p_i^0)(x_i^0+\Delta x_i^0) < \sum_{i=1}^{n} (p_i^0+\Delta p_i^0)x_i^0 \text{।} \qquad \ldots(3\cdot9)$$

β_i-এর সংজ্ঞা অনুসারে $\beta_1=1$। অতএব, (3.8) এবং (3.9) থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে

$$(x_1^0+\Delta x_1^0)+\sum_{i=2}^{n} (x_i^0+\Delta x_i^0)\beta_i=x_1^0+\sum_{i=2}^{n} x_i^0\beta_i \qquad \ldots(3\cdot10)$$

$$\longrightarrow$$

$$(x_1^0+\Delta x_1^0)+\sum_{i=2}^{n} (x_i^0+\Delta x_i^0)(\beta_i+\Delta\beta_i) < x_1^0+\sum_{i=2}^{n} x_i^0(\beta_i+\Delta\beta_i) \text{।}$$

$$\ldots(3\cdot11)$$

অথবা,

$$\Delta x_1^0+\sum_{i=2}^{n} \beta_i\Delta x_i^0=0 \qquad \ldots(3\cdot12)$$

$$\longrightarrow$$

$$\Delta x_1^0+\sum_{i=2}^{n}\beta_i\Delta x_i^0+\sum_{i=2}^{n}\Delta\beta_i\Delta x_i^0 < 0 \text{।} \qquad \ldots(3\cdot13)$$

অথবা,

$$\sum_{i=2}^{n} \Delta\beta_i \Delta x_i^0 < 0। \qquad [Q.E.D.] \qquad \ldots(3 \cdot 14)$$

এই প্রতিপাদ্যে যে-ফল পাওয়া গেল তাকে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের উপর একটি সাধারণ নিষেধ শর্ত হিসেবে বিবেচনা করা যেতে পারে। প্রথম দ্রব্যটিকে নিউমারেয়্যার হিসেবে কল্পনা করলে অন্যান্য দ্রব্যাদির আপেক্ষিক মূল্য পরিবর্তন যদি একসঙ্গে হয় তাহলে ভোক্তার চাহিদার (বা তার মোট ব্যয়ের) উপরে কি প্রভাব পড়বে (3.14)-এর অসমীকরণ থেকে তা স্পষ্ট জানা যাচ্ছে। শুধুমাত্র যে-কোনো একটি দ্রব্যের, ধরা যাক k-তম দ্রব্যের, আপেক্ষিক মূল্যের যদি পরিবর্তন হয় তাহলে $\Delta\beta_k \Delta x_k^0 = (\beta_k^1 - \beta_k)\ (x_k^1 - x_k^0) < 0$। অর্থাৎ, মূল্য ও চাহিদার পরিবর্তন বিপরীতমুখী।

প্রতিপাদ্য 3.3 কোনো দ্রব্যের বেলায় আয় প্রভাব ধনাত্মক হ'লে মূল্য-প্রভাব ঋণাত্মক হবে।

প্রমাণঃ—মনে করা যাক তিনটি আয়-মূল্য পরিস্থিতি দেওয়া আছেঃ (x^1, p^1, M^1), (x^2, p^2, M^2) এবং (x^3, p^3, M^3)। লক্ষণীয় যে

$M^1 = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1$। উপরন্তু মনে করা যাক যে

$$p_1^2 > p_1^1 \qquad \ldots(3 \cdot 15)$$

$$p_i^2 = p_i^1 (i = 2, \ \ldots, \ n) \qquad \ldots(3 \cdot 16)$$

$$M^2 = M^1 \qquad \ldots(3 \cdot 17)$$

$$p^3 = p^2 \qquad \ldots(3 \cdot 18)$$

$$M^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^1 \qquad \ldots(3 \cdot 19)$$

লক্ষণীয় যে তৃতীয় আয়-মূল্য পরিস্থিতির তাৎপর্য এই যে দ্বিতীয় পরিস্থিতিতে প্রথম দ্রব্যের মূল্য বৃদ্ধি হয়েছে বলে ভোক্তার প্রকৃত অবস্থার যে-অবনতি তার জন্য আর্থিক ক্ষতিপূরণের ব্যবস্থা করা হয়েছে। তৃতীয় পরিস্থিতির আর্থিক আয় এমন যে দ্বিতীয় পরিস্থিতির মূল্যাবলিতে

ভোক্তা প্রথম পরিস্থিতির দ্রব্যাদি কিনতে পারে। এখন প্রতিপাদ্যের প্রমাণের জন্য দেখানো প্রয়োজন যে $x_1^1 > x_1^2$।

(3.15) – (3.19) -এর শর্তাবলি থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে

$$M^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i^3 x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^1 \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1 = M^1 = M^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^2$$

$$\geqq \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^2 \text{।} \qquad \ldots (3 \cdot 20)$$

প্রথম দ্রব্যটি যদি নিকৃষ্ট দ্রব্য না হয় (অর্থাৎ, আয় প্রভাব যদি ধনাত্মক হয়), তাহলে

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^3 \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^2 \rightarrow x_1^3 \geqq x_1^2 \text{।} \qquad \ldots (3 \cdot 21)$$

(3.20) থেকে আমরা পেয়েছিঃ

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^3 x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^1 ;$$

এবং যেহেতু $p^3 = p^2$, তাই $x^1 \bar{R} x^3$।

অতএব,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^1 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^1 < \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i^3$$

অথবা

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 (x_i^3 - x_i^1) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i^1 (x_i^3 - x_i^1) > 0 \qquad \ldots (3 \cdot 22)$$

অথবা

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i^2 - p_i^1)(x_i^3 - x_i^1) < 0$$

অথবা

$$(p_1^2-p_1^1)(x_1^3-x_1^1)<0, \quad \text{যেহেতু } p_i^2=p_i^1 \; (i=2, \ldots, n) \qquad \ldots(3\cdot23)$$

(3.23) -এর $p_1^2>p_1^1$; অতএব, $x_1^3<x_1^1$। (3.21) -এর $x_1^3 \geqq x_1^2$ একসঙ্গে বিবেচনা করলে আমরা পাই $x_1^1>x_1^3 \geqq x_1^2$, অথবা, $x_1^1>x_1^2$। [Q.E.D.]

4. হাউথেকার স্বীকার্য[1] ও সমউপযোগ রেখা

উপযোগ অপেক্ষক বা সমউপযোগ রেখার কল্পনা না ক'রে সরাসরি ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের উপর কিছু নিষেধ শর্ত আরোপ করলেও চাহিদা অপেক্ষকের প্রচলিত এম্পিরিকাল গুণাবলি নির্ধারণ করা যায়। কাজেই এ পর্যন্ত নিওক্ল্যাসিকাল পছন্দ সম্পর্ক ও গোচরীভূত পছন্দকে ভোক্তার চাহিদা তত্ত্বের দুটি বিকল্প হিসেবে মনে করা যেতে পারে। এই দুই ভিত্তির পরস্পর সম্পর্ক নির্ণয় করা বর্তমান অংশের উদ্দেশ্য।

গোচরীভূত পছন্দে আমরা বিভিন্ন আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে ভোক্তার বাস্তব ক্রয়গুলিকে লক্ষ্য করি। স্যামুয়েলসন্ প্রস্তাবিত স্বীকার্যে দুটি মাত্র দ্রব্যসমষ্টির ক্রয় প্রসঙ্গে ভোক্তার আচরণে এক নিষেধ আরোপ করা হয়। ভোক্তা যদি কোনো অবস্থায় বস্তুত x^0 দ্রব্যসমষ্টি কিনে থাকে এবং x^1 কেনা সম্ভব হলেও না কিনে থাকে তাহলে যতোক্ষণ x^0 তার পক্ষে কেনা সম্ভব সে x^1 কিনবে না। ভোক্তার আচরণে এই সঙ্গতিই হ'ল স্যামুয়েলসন্ স্বীকার্যের মূল কথা। লক্ষণীয় যে এই স্বীকার্যের ভিত্তিতে x^0, x^1 এবং x^2 এইরকম তিনটি দ্রব্যসমষ্টির মধ্যে যদি x^0Rx^1 এবং x^1Rx^2 এইরকম গোচরীভূত পছন্দ সম্পর্ক বর্তমান থাকেও তাহলে বলা চলে না যে x^0Rx^2।

হাউথেকার প্রস্তাবিত স্বীকার্যে R-সম্পর্কটিকে একটু বিস্তৃতভাবে নেওয়া হয়েছে। মাত্র দুটি দ্রব্যসমষ্টির বদলে যে-কোনো সংখ্যক দ্রব্যসমষ্টির ক্ষেত্রে সম্পর্কটিকে ব্যবহার করা হয়েছে। হাউথেকার প্রদর্শিত পদ্ধতিতে আমরা প্রমাণ করব যে এই বিস্তৃত স্বীকার্যের সাহায্যে ভোক্তার বাস্তব আচরণ থেকে তার সমউপযোগ রেখা নির্মাণ করা সম্ভব হবে।

1 H.S. Houthakker—Revealed Preference and the utility Function [*Economica*, N.S. Vol 7, 1950]

সংজ্ঞা 4.1 অপ্রত্যক্ষ গোচরীভূত পছন্দ (R^*)ঃ—x^0 এবং x^n এই দুই দ্রব্যসমষ্টির মধ্যে যদি এমন একটি সসীম (শূন্যও হতে পারে) দ্রব্যসমষ্টি ক্রম $x^1, \ldots, x^{n-1}$ থাকে যে $x^0Rx^1Rx^2R\ldots Rx^{n-1}Rx^n$ তাহলে x^0-কে x^n-এর তুলনায় **অপ্রত্যক্ষ গোচরীভূত পছন্দ** বলা হয়। সেক্ষেত্রে আমরা লিখি $x^0R^*x^n$।

R-এর মতো R^*-ও একটি দ্বিনিধানী সম্পর্ক। R^*-এর সঙ্গে তফাত নির্দেশ করার জন্য R-কে বলা যেতে পারে **প্রত্যক্ষ গোচরীভূত পছন্দ সম্পর্ক**।

হাউথেকার স্বীকার্যঃ $x^0R^*x^n \rightarrow x^n\bar{R}^*x^0$।

সমউপযোগ রেখা নির্মাণ করার আগে প্রসঙ্গত লক্ষ্য করা যেতে পারে যে পূরণবাচক উপযোগ অপেক্ষকের অস্তিত্ব ধরে নিলে দেখানো যায় হাউথেকার স্বীকার্য সিদ্ধ। অর্থাৎ, হাউথেকার স্বীকার্য উপযোগ অপেক্ষকের প্রয়োজনীয় শর্ত। মনে করা যাক $U(x^k)$ হ'ল x^k দ্রব্যসমষ্টির উপযোগ মান। মনে করা যাক $k=1, \ldots, K$-এর জন্য $U(x^1) > U(x^2) > \ldots > U(x^k)$। উপযোগ অপেক্ষকের একমুখীনতার জন্য $x^{k-1} > x^k$। অর্থাৎ, x^{k-1} দ্রব্যসমষ্টি x^k-এর তুলনায় বৃহত্তর। অতএব $p^{k-1}x^{k-1} > p^{k-1}x^k$। অতএব, $x^{k-1}Rx^k (k=1, \ldots, K)$। এখন যদি x^kRx^1 হয় তাহলে $p^kx^k \geqq p^kx^1$। কিন্তু তা সম্ভব নয়, কারণ x^1 দ্রব্যসমষ্টি x^k-এর তুলনায় বৃহত্তর। অতএব, $p^k x^k < p^kx^1$; অর্থাৎ, $x^k\bar{R}x^1$। কাজেই এ ক্ষেত্রে হাউথেকার স্বীকার্য সিদ্ধ।

সমউপযোগ রেখা নির্মাণ

মনে করা যাক x^0 দ্রব্যসমষ্টি স্পেসের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। x^0-এর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করে যে-সমউপযোগ রেখা তা নির্মাণ করতে গেলে x^0-এর সঙ্গে পছন্দ সম্পর্কের বিচারে 'তুল্যমূল্য' অন্যান্য সব দ্রব্যসমষ্টি নির্ণয় করতে হবে। লক্ষণীয় যে x^0-এর সঙ্গে সমউপযোগ বিশিষ্ট যাবতীয় দ্রব্যসমষ্টির চরিত্র এই যে ঐসব বিন্দুর মধ্যে এমন একটি দ্বিনিধানী সম্পর্ক বর্তমান যা স্ববৃত, প্রতিসম[1] এবং সংক্রমী। এই তিনটি ধর্মবিশিষ্ট দ্বিনিধানী সম্পর্ককে আমরা 'I' চিহ্ন দিয়ে নির্দেশ করতে পারি।[2]

1 কোনো দ্বিনিধানী সম্পর্ক R-কে **প্রতিসম** বলা হয় যদি এবং একমাত্র যদি $xRy \rightarrow yRx$।

2 মনে রাখতে হবে যে সংজ্ঞা অনুসারে xIy যদি এবং একমাত্র যদি xRy & yRx।

আমরা প্রথমে নির্দিষ্ট বিন্দু x^0-এর সঙ্গে 'তুল্যমূল্য' অন্যান্য সব বিন্দু নির্ণয় করব। পরে আমরা হাউথেকার স্বীকার্যের সাহায্যে প্রমাণ করব যে ঐ 'তুল্যমূল্য' বিন্দুগুলির মধ্যে যে দ্বিনিধানী সম্পর্ক তা স্ববৃত, প্রতিসম এবং সংক্রমী। অতএব ঐ 'তুল্যমূল্য'তার সম্পর্ককেই আমরা I-এর নির্দেশক ব'লে ধরতে পারি। নির্ণীত বিন্দুগুলির জ্যামিতিক প্রতি-রূপায়ণকে আমরা বলতে পারি x^0-এর মধ্য দিয়ে অতিক্রমী সমউপযোগ রেখা।

'তুল্যমূল্য' বিন্দুগুলি নির্ণয় করতে গিয়ে আমরা প্রথমে **ঊর্ধ্ব আয়ক্রম** এবং **নিম্ন আয়-ক্রম** এই নামে দুটি আয়-ক্রম নির্ধারণ করব। মনে করা যাক p^0-মূল্যাবলিতে বস্তুত যে-দ্রব্যসমষ্টি ভোক্তা কিনছে তা হ'ল x^0। p^0x^0 এই আয়কে M^0 এই চিহ্নে নির্দেশ করা যাক। মনে করা যাক S একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। $M^{0s}, M^{1s}, \ldots, M^{ss}$ এমন একটি আয়-ক্রম যার সংজ্ঞা নিচে দেওয়া হ'লঃ

$$M^{0s}=M^0,\ x^{0s}=x^0=h^{1}(p^0,\ M^0)$$

$$M^{1s}=p^{1/s}\ x^{0s},\ x^{0s}=h\ (p^{0/s}, M^{0s})$$

(লক্ষণীয় যে $h(p^{0/s}, M^{0s})=h(p^0, M^0)$, কারণ $p^{0/s}=p^0$ এবং $M^{0s}=M^0$।)

$$M^{2s}=p^{2/s}\ \ x^{1s},\ x^{1s}=h\ \ (p^{1/s},\ M^{1s}) \qquad (4\cdot1)$$

....

$$M^{ss}=\ p^{s/s}\ \ x^{s-1,\ s},$$
$$x^{s-1,\ s}=h\ \ (p^{s-1/s},\ \ M^{s-1,\ s})$$

এখানে মূল্যাবলি p^t-কে এমনভাবে নেওয়া হয়েছে যে $p^t=p^0+t(p-p^0)\ 0\leqslant t\leqslant 1$। p^0 হ'ল প্রাথমিক মূল্যাবলি এবং p হ'ল p^0-এর চেয়ে বেশি যে-কোনো মূল্যাবলি।

লক্ষণীয় যে ঊর্ধ্ব আয়-ক্রমের প্রত্যেক পর্বের আয় এমন যে ঐ পর্বের আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি পূর্ববর্তী পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টির তুলনায় ভোক্তার কাছে বেশি পছন্দ (গোচরী-ভূত পছন্দের অর্থে)। $x^{is}(i=1, \ldots, s)$ যদি i-তম পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি হয় তাহলে (4.1)-এর নির্মাণ থেকে এটা বোঝা যাচ্ছে যে

$$M^{is}=p^{i/s}\ x^{is}=\ p^{i/s}\ x^{i-1,\ s}।$$

1 h হ'ল আলোচ্য প্রসঙ্গে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকঃ p^0-মূল্যাবলিতে এবং M^0-আয়ে ভোক্তা যে-দ্রব্যসমষ্টি কিনছে তা h-অপেক্ষকের সাহায্যে নির্ধারিত হচ্ছে।

অতএব, $x^{is}\ R\ x^{i-1,\ s}$।

$M^{0s}=M^0$-এর তুলনায় নিম্নআয়-ক্রমের পদগুলিকে যদি $\mathbf{M}^{1s}, \mathbf{M}^{2s}, \ldots,$ $\mathbf{M}^{ss}$ হিসেবে চিহ্নিত করা যায় এবং $\mathbf{x}^{is}$ যদি নিম্ন আয়-ক্রমের i-তম পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি হয় তাহলে পদগুলির সংজ্ঞা দেওয়া যেতে পারে:

$$\left.\begin{array}{l}
M^{0s}=\mathbf{M}^{0s}=M^0=p^0\mathbf{x}^{1s}\cdot,\ x's=h(p^{1/s},\ \mathbf{M}^{1s})\\
\mathbf{M}^{1s}=p^{1/s}\ \mathbf{x}^{2s},\ \mathbf{x}^{2s}=h\ (p^{2/s},\ \mathbf{M}^{2s})\\
\mathbf{M}^{2s}=p^{2/s}\ \mathbf{x}^{3s},\ \mathbf{x}^{3s}=h\ \ (p^{3/s},\ \mathbf{M}^{3s})\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{M}^{s-1,\ s}=p^{(s-1)/s}\ \mathbf{x}^{ss},\ \mathbf{x}^{ss}=h\ (p^{s/s}, \mathbf{M}^{ss})\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =h(p,\ \mathbf{M}^{ss})
\end{array}\right\}\ (4\cdot2)$$

এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে ঊর্ধ্ব আয়-ক্রমের প্রত্যেক পর্বের আয় নির্ধারণ করার জন্য পূর্ববর্তী পর্বের আয় জানা প্রয়োজন। পূর্ববর্তী পর্বের আয় এবং মূল্যের ভিত্তিতে নির্ধারিত দ্রব্যসমষ্টির সাহায্যে পরবর্তী পর্বের আয় নির্ধারণ করা হচ্ছে। কিন্তু নিম্ন আয়-ক্রমের প্রত্যেক পর্বের আয় নির্ধারণ করার জন্য পরবর্তী পর্বের আয় জানা প্রয়োজন। প্রাথমিক পর্বের আয় $\mathbf{M}^{0s}$ দেওয়া আছে। (4.2) -এর সংজ্ঞা থেকে $\mathbf{M}^{1s}$ নির্ধারণ করার জন্য যে-সমীকরণ পাওয়া যাচ্ছে তা হ'ল

$$\mathbf{M}^{0s}=p^0h(p^{1/s},\ \mathbf{M}^{1s})\text{।} \qquad \ldots(4\cdot2\text{a})$$

(4.2a) -এর মধ্যে $\mathbf{M}^{0s}$ দেওয়া আছে, p^0 জানা আছে এবং s পূর্বনির্ধারিত বলে $p^{1/s}$-ও জানা হয়ে যাচ্ছে। অতএব (4.2a) -এর সমাধান থেকে $\mathbf{M}^{1s}$ নির্ধারিত হবে। সমীকরণটি স্পষ্টত সমাধানযোগ্য। কারণ, যে-কোনো নির্দিষ্ট $p^{1/s}$-এর জন্য $\mathbf{M}^{1s}$ বাড়ালে (4.2a) -এর ডান দিককার মান বৃদ্ধি হয়; আবার $\mathbf{M}^{1s}$ কমালে ঐ মান হ্রাস পায়। অর্থাৎ, (4.2a) -এর ডান দিককার পদটি $\mathbf{M}^{1s}$-এর সঙ্গে সঙ্গে 0 থেকে ∞ পর্যন্ত সব মান গ্রহণ করে। (লক্ষণীয় যে h-অপেক্ষকটি M-আপেক্ষিক নিরবচ্ছিন্ন বলে ধরা হচ্ছে।[1]) অতএব $\mathbf{M}^{1s}$-এর কোনো একটি মানের জন্য $p^0h(p^{1s},$ $\mathbf{M}^{1s})$ পূর্বনির্ধারিত $\mathbf{M}^{0s}$-এর সঙ্গে সমান হবে। $\mathbf{M}^{1s}$-এর ঐ মানটিই হবে নিম্ন আয়-ক্রমের প্রথম পর্বের পদ। একই পদ্ধতিতে দ্বিতীয় এবং অন্যান্য সব পর্বের পদগুলি নির্ধারণ করা যাবে।

---

1 চাহিদা অপেক্ষকের এই নিরবচ্ছিন্নতার সঙ্গে লিপ্‌শিৎস্‌ শর্তের সম্পর্ক পরে আলোচনা করা হবে। লিপ্‌শিৎস্‌ শর্তের অর্থনৈতিক তাৎপর্যও ঐ প্রসঙ্গে আলোচ্য।

নিম্ন আয়-ক্রমের প্রত্যেক পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি যে পূর্ববর্তী পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টির তুলনায় কম পছন্দ (গোচরীভূত পছন্দের অর্থে) তাও (4.2)-এর সংজ্ঞা থেকে পরিষ্কার দেখা যাচ্ছে। প্রাথমিক পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি $x^0 = x^{0s}$ এমন যে $p^0 x^{0s} = M^{0s}$। নিম্ন আয়-ক্রমের প্রথম পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি x^{1s} এমন যে $p^0 x^{1s} = \mathbf{M}^{0s} = M^{0s}$। অতএব $x^{0s}\ R\ x^{1s}$। একই রকম ভাবে দেখা যায় যে $\mathbf{M}^{1s} = p^{1/s}\, x^{1s} = p^{1/s}\, x^{2s}$। অতএব $x^{1s}\ R\ \ x^{2s}$। এই ভাবে $x^{s-1,\, s}\ R\ x^{ss}$।

এখন ঊর্ধ্ব আয়-ক্রম এবং নিম্ন আয়-ক্রমকে মিলিয়ে প্রত্যেক পর্বের বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টির প্রসঙ্গে বলা চলে যে

$$x^{ss}\, R x^{s-1,\, s}\, R \ldots \mathrm{R}\ \ x^{2s}\, R x^{1s}\, R x^{0s} = x^0\ R \mathbf{x}^{1s}\ R$$
$$R \mathbf{x}^{2s}\, R \ldots R\ \ \mathbf{x}^{s-1,\, s}\, R\, \mathbf{x}^{ss} \qquad \ldots (4{\cdot}3)$$

ঊর্ধ্ব আয়-ক্রমের নির্মাণ থেকে আমরা এর সাধারণ সমীকরণটিকে লিখতে পারি

$$p^{i/s}\, x^{is} = p^{i/s}\ x^{i-1,\, s}$$

অথবা

$$p^{i/s}\, x^{is} - p^{(i-1)/s}\ x^{i-1\, s} = p^{i/s}\, x^{i-1,\, s} - p^{(i-1)/s}\ x^{i-1,\, s}$$

অথবা

$$\Delta M^{is} = x^{i-1,\, s}\ (\, p^{i/s} - p^{(i-1)/s})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^{i-1,\, s}\ \ (\, p_j^{i/s} - p_j^{\ (i-1)/s})$$
$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^{i-1,\, s}\, \Delta p_j \text{।} \qquad \ldots (4{\cdot}4)$$

এখন (4.4)-এর উপর পরিণামী প্রক্রিয়া প্রয়োগ করলে সমীকরণটিকে আমরা কলনীয় রূপে পাইঃ

$$dM^{is} = \sum_{j=1}^{n} x_j^{i-1,\, s}\, dp_j \qquad \ldots (4{\cdot}5)$$

(4.5) হ'ল ঊর্ধ্ব আয়-ক্রমের কলনীয় সমীকরণ।

একই ভাবে আমরা নিম্নআয়-ক্রমের কলনীয় সমীকরণও পেতে পারি। (4.2)-এর নির্মাণ থেকে পাচ্ছি যে

$$p^{i/s}\, \mathbf{x}^{i+1,\, s} = p^{i/s}\, \mathbf{x}^{is}$$

অথবা

$$-p^{i/s}\mathbf{x}^{is} = -p^{i/s}\mathbf{x}^{i+1,s}$$

অথবা

$$p^{(i+1)/s}\mathbf{x}^{i+1,s} - p^{i/s}\mathbf{x}^{is} = p^{(i+1)/s}\mathbf{x}^{i+1,s} - p^{i/s}\mathbf{x}^{i+1,s}$$

অথবা

$$\Delta\mathbf{M}^{i+1,s} = \mathbf{x}^{i+1,s}(p^{(i+1)/s} - p^{i/s})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j^{i+1,s}\Delta p_j \qquad \ldots(4\cdot6)$$

(4.6) -কে এখন লেখা যেতে পারে

$$\Delta\mathbf{M}^{i+1,s} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j^{i+1,s}\Delta p_j + \sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j^{is}\Delta p_j - \sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j^{is}\Delta p_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j^{is}\Delta p_j + \sum_{j=1}^{n}\Delta\mathbf{x}_j^{i+1,s}\Delta p_j \qquad \ldots(4\cdot7)$$

(4.7) -এর ডান দিককার দ্বিতীয় পদটিকে উচ্চতর পর্যায়ের ক্ষুদ্র পদ হিসেবে যদি বাদ দেওয়া যায় তাহলে পরিণামী প্রক্রিয়ায় যে কলনীয় সমীকরণ পাওয়া যায় তা হ'লঃ

$$d\mathbf{M}^{i+1,s} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j^{is}dp_j \text{।} \qquad \ldots(4\cdot8)$$

(4.5) এবং (4.8) -এর সমীকরণ কিন্তু আলাদা নয়, একই। অর্থাৎ, ঊর্ধ্ব আয়-ক্রম এবং নিম্ন আয়-ক্রমের বেলাতে যে-সমীকরণ সিদ্ধ তা অভিন্ন। এখন যদি প্রমাণ করা যায় যে এই সমীকরণটি সমাধানযোগ্য এবং সেই সমাধান অনন্য তাহলে প্রমাণ হবে ঊর্ধ্ব আয়-ক্রম এবং নিম্ন আয়-ক্রমের পদগুলিও অভিন্ন। আলোচ্য সমীকরণের অনন্য সমাধানযোগ্যতা প্রমাণের জন্য চাহিদা অপেক্ষকের উপর একটি বাড়তি শর্ত আরোপ করার প্রয়োজন পড়ে। প্রাসঙ্গিক গাণিতিক শর্তটি লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত নামে পরিচিত।[1]

সংজ্ঞা 4.2 $h(p, M)$ অপেক্ষকটি (p^o, M^0) বিন্দুতে M-আপেক্ষিক লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত পূরণ করে যদি এবং একমাত্র যদি এমন দুটি প্রকৃত সংখ্যা $\varepsilon>0$ এবং $K>0$ থাকে যে যখনই

$$||p-p^0||<\varepsilon,\ p>0, \text{ এবং } |M'-M^0|<\varepsilon,\ |M''-M^0|<\varepsilon,\ M', M''\geqq 0, \text{ তখনই } ||h(p, M')-h(p,M'')||\leqq K|M'-M''| \quad \ldots(4\cdot9)$$

K ধ্রুব রাশিটিকে বলা হয় **লিপ্‌শিৎস্‌ ধ্রুবক**।

যদি শুধু বলা হয় যে $h(p, M)$ অপেক্ষকটি M-আপেক্ষিক লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত পূরণ করে তাহলে বুঝতে হবে যে p এবং M-এর সব মানের জন্যই ঐ শর্ত সিদ্ধ।

(4 9) থেকে স্পষ্ট দেখা যাচ্ছে যে h-অপেক্ষক যদি M-আপেক্ষিক লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত পূরণ করে তবে তা M-আপেক্ষিক নিরবচ্ছিন্নও হবে।

আলোচ্য লিপ্‌শিৎস্‌ শর্তের অর্থনৈতিক তাৎপর্যের জন্য আর একটি গাণিতিক ফল উল্লেখ করা প্রয়োজন। M-এর পরিবর্তনজনিত h-অপেক্ষকের ডেরিভেটিভের যদি একটি নির্দিষ্ট ঊর্ধ্বসীমা থাকে তবে ঐ অপেক্ষকের বেলায় লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত পূর্ণ হবে। বস্তুত, আংশিক ডেরিভেটিভের ঊর্ধ্বসীমাই হবে প্রাসঙ্গিক লিপ্‌শিৎস্‌ ধ্রুবক।[1] অর্থাৎ, আমাদের বর্তমান ক্ষেত্রে h-অপেক্ষক কোনো লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত পূরণ করবে কিনা তা নির্ভর করছে আয়ের পরিবর্তনজনিত চাহিদা অপেক্ষকের আংশিক ডেরিভেটিভের উপর।

একথা সহজেই প্রমাণ করা সম্ভব যে আলোচ্য n-সংখ্যক দ্রব্যের কোনো-টিই যদি নিকৃষ্ট দ্রব্য না হয় তাহলে আয়ের পরিবর্তনজনিত চাহিদা অপেক্ষকের আংশিক ডেরিভেটিভের ঊর্ধ্বসীমা থাকবে। বাজেট সমীকরণের থেকে আমরা পাই :

$$\Delta M=\sum_{i=1}^{n} p_i\Delta x_i; \quad \ldots(4\cdot10)$$

এখানে

$$\Delta x_i = h_i(p, M+\Delta M) - h_i(p, M) \ (i=1, \ldots, n)\text{।}$$

কোনো দ্রব্যই যদি নিকৃষ্ট না হয় তাহলে $\dfrac{\Delta x_i}{\Delta M} \geqslant 0 (i=1, \ldots, n)$।

(4.10) থেকে পাইঃ

$$p_1\Delta x_1 = \Delta M - p_2\Delta x_2 - \ldots - p_n\Delta x_n$$

অথবা

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta M} = \frac{1}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}\frac{\Delta x_2}{\Delta M} - \ldots - \frac{p_n}{p_1}\frac{\Delta x_n}{\Delta M}$$

অথবা

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta M} \leqslant \frac{1}{p_1}, \text{ যেহেতু } \frac{\Delta x_i}{\Delta M} \geqslant 0 \ (i=1, \ldots, n$$

অতএব, সাধারণভাবে

$$\frac{\Delta x_i}{\Delta M} \leqslant \frac{1}{p_i} \ (i=1, \ldots, n) \qquad \ldots(4 \cdot 11)$$

উপরের আলোচনা থেকে দেখা গেল যে আলোচ্য দ্রব্যের কোনোটিই নিকৃষ্ট নয় এই অঙ্গীকার মেনে নিলে ভোক্তার কল্পিত চাহিদা অপেক্ষক আয়-আপেক্ষিক লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত পূরণ করে। এবং সেক্ষেত্রে ঊর্ধ্ব আয়-ক্রম ও নিম্ন আয়-ক্রমের নিয়ন্ত্রণকারী সমীকরণের অনন্য সমাধান থাকবে। অতএব ঊর্ধ্ব আয়-ক্রম ও নিম্ন আয়-ক্রম অভিন্ন। এই আয়-ক্রমের যে-কোনো পদ M^i দেওয়া থাকলে আমরা এমন একটি দ্রব্যসমষ্টি x^i পেতে পারি যে ভোক্তার প্রাথমিক নির্বাচন x^0-এর সঙ্গে তুলনায় $x^0\bar{R}^*x^i$ এবং $x^i\bar{R}^*x^0$। এখন আমরা প্রমাণ করব যে এই x^i দ্রব্যসমষ্টিগুলি হ'ল x^0-এর মধ্য দিয়ে অতিক্রমী সমউপযোগ রেখার অন্যান্য বিন্দু।

আগেই মন্তব্য করা হয়েছে যে x^0-এর মধ্য দিয়ে অতিক্রমী সমউপযোগী রেখার বিন্দুগুলির সঙ্গে x^0-এর সম্পর্ক এমন যে তা স্ববৃত, প্রতিসম এবং সংক্রমী। অতএব এখন আমাদের প্রমাণ করা প্রয়োজন যে নির্ধারিত x^i বিন্দুগুলির সঙ্গে x^0-এর সম্পর্কে এই তিনটি ধর্মই বর্তমান। মনে করা যাক x^0 এবং x^i-এর যে-কোনো বিন্দুর মধ্যে যে-সম্পর্ক রয়েছে তাকে E দিয়ে চিহ্নিত করা গেল।

E-এর প্রতিসাম্য

সংজ্ঞা অনুসারে

$x^0 E x^1$ যদি এবং একমাত্র যদি $[(x^0 \bar{R}^* x^1) \& (x^1 \bar{R}^* x^0)]$

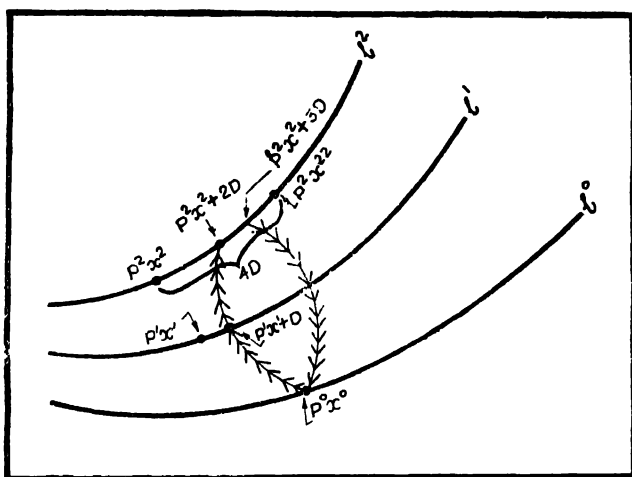
এবং $x^1 E x^0$ যদি এবং একমাত্র যদি $[(x^1 \bar{R}^* x^0) \& (x^0 \bar{R}^* x^1)]$। স্পষ্টত, $x^0 E x^1 \rightarrow x^1 E x^0$। অতএব, E সম্পর্কটি প্রতিসম।

E-এর সংক্রমিতা

মনে করা যাক x^0, x^1 এবং x^2 এমন তিনটি দ্রব্যসমষ্টি যে $x^2 E x^1 E x^0$। আমাদের প্রমাণ করা প্রয়োজন যে $x^2 E x^0$। মনে করা যাক যে-মূল্যে x^2 বস্তুত নির্বাচিত হয়েছে তা হ'ল p^2। এখন দুটি সম্ভাবনা আছেঃ (i) p^2 হ'ল প্রাথমিক মূল্যাবলি p^0 থেকে শুরু করে অন্ত্য মূল্যাবলি p-এর মধ্যবর্তী একটি পর্ব; (ii) p^2 হ'ল নিজেই অন্ত্য পর্ব, অর্থাৎ, $p = p^2$। এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে আমাদের নির্মাণের জন্য প্রয়োজনীয় ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ধরা যাক $S = 2$; p^2 মূল্যাবলিতে বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি তাহলে x^{22}। লক্ষণীয় যে এই x^{22} এমন একটি দ্রব্যসমষ্টি যে আমরা সরাসরি $x^{22} E x^0$ পাচ্ছি। এই দ্বিতীয় ক্ষেত্রে যদি আমরা প্রমাণ করতে পারি যে $x^{22} = x^2$ তাহলে E-এর সংক্রমিতা প্রমাণ হয়ে যাচ্ছে।

$p^2 x^{22}$ এবং $p^2 x^2$ এই আয় দুটি যদি সমান হয় তাহলে $x^{22} = x^2$, যেহেতু চাহিদা অপেক্ষক একমান বিশিষ্ট। মনে করা যাক $p^2 x^{22} > p^2 x^2$ এবং $p^2 x^{22} - p^2 x^2 = 4D$। এখানে D যে-কোনো একটি ধনাত্মক রাশি। নিচের চিত্র 4.1-এ l^0, l^1 এবং l^2 হ'ল যথাক্রমে p^0, p^1 এবং p^2 মূল্যাবলিতে বিভিন্ন আয়ে বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টির সঞ্চারপথ। এখন l^0-এর উপর প্রাথমিক বিন্দু $p^0 x^0$ থেকে শুরু করে l^1-এর উপর $p^1 x^1 + D$ পর্যন্ত একটি ঊর্ধ্ব আয়-ক্রম নির্মাণ করা হ'ল। আবার $p^1 x^1 + D$-কে প্রাথমিক বিন্দু নিয়ে l^2-এর উপর $p^2 x^2 + 2D$ পর্যন্ত একটি ঊর্ধ্ব আয়-ক্রম নির্মাণ করা হ'ল।

$p^2 x^2 + 2D$-এর অবস্থান $p^2 x^2$ এবং $p^2 x^{22}$-এর ঠিক মধ্যবর্তী। $p^0 x^0$ থেকে $p^2 x^2 + 2D$ পর্যন্ত পথের উপর নির্বাচিত সব দ্রব্যসমষ্টি x^0-এর তুলনায় বেশি পছন্দ (গোচরীভূত পছন্দের অর্থে)। আবার $p^0 x^0$ থেকে শুরু করে l^2-এর উপর $p^2 x^2 + 3D$ পর্যন্ত একটি নিম্ন আয়-ক্রম নির্মাণ করা হ'ল। এই পথের উপরকার সব দ্রব্যসমষ্টির তুলনায় x^0 বেশি পছন্দ (গোচরীভূত পছন্দের অর্থে।)

এবার $p^2 x^2 + 2D$ থেকে শুরু করে $p^1 x^1 + D$ এবং $p^0 x^0$ হ'য়ে

চিত্র 4.1

p^2x^2+3D পর্যন্ত গোটা পথটিকে কল্পনা করা যাক। এই পথের উপরকার কোনো দ্রব্যসমষ্টি তার পূর্ববর্তী দ্রব্যসমষ্টির তুলনায় বেশি পছন্দ নয়। অর্থাৎ $x^i\bar{R}x^{i-1}$। (আমরা কিন্তু বর্তমানে তীর চিহ্নের বিপরীতে এগোচ্ছি)। p^2x^2+3D এই আয়ে বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি যদি $\overset{=}{x}$ হয় এবং p^2x^2+2D আয়ে বস্তুত নির্বাচিত দ্রব্যসমষ্টি যদি $\bar{x}$ হয় তাহলে $\overset{=}{x}\bar{R}^*\bar{x}$। অতএব $p^2\overset{=}{x}=p^2x^2+3D<p^2\bar{x}=p^2x^2+2D$ ... (4.12)

(4.12) কিন্তু সত্য হতে পারে না, কারণ $D>0$। এই অসংগতিই E-এর সংক্রমিতার প্রমাণ।

E-এর স্ববৃতি

E-এর স্ববৃতি প্রমাণের জন্য সংক্রমিতার প্রমাণকেই ব্যবহার করা যায়। E সংক্রমী ব'লে $(x^0Ex^1)\&(x^1Ex^2)\rightarrow(x^0Ex^2)$। $x^2=x^0$ ধ'রে নিয়ে সংক্রমিতার প্রমাণে ব্যবহৃত নির্মাণ প্রয়োগ করলে আমরা পাই x^0Ex^0। এই প্রয়োগ করবার জন্য মনে করতে হবে যে l^0 সঞ্চারপথের উপর p^0x^0 একটি প্রাথমিক বিন্দু। $p=p^0$-কে মনে করতে হবে অন্ত্য মূল্যাবলি। আগের মতো একই পদ্ধতিতে প্রমাণ করা সম্ভব যে $p^0x^0=p^0x^{00}$। অতএব $x^0=x^{00}$। তাহলে এক্ষেত্রে পাওয়া গেল যে x^0Ex^1 এবং x^1Ex^{00}। সংক্রমিতার সাহায্যে x^0Ex^{00}। কিন্তু $x^0=x^{00}$ ব'লে x^0Ex^0। অতএব E স্ববৃত।

বর্তমান ক্ষেত্রে লক্ষ্য করা দরকার যে চিত্র 4.1-এর সমস্ত নির্মাণটি শুধুমাত্র l^0 সঞ্চারপথের উপরে থাকছে। অর্থাৎ, l^2, l^1 সঞ্চারপথ দুটি যেন l^0-এর সঙ্গে মিশে গেছে।

5. অন্তর্নিহিত পছন্দ, গোচরীভূত পছন্দ ও চাহিদা অপেক্ষকঃ উজাওয়ার সমন্বয়

ভোক্তার চাহিদা সম্পর্কিত আচরণের বিশ্লেষণে আমরা এ পর্যন্ত তিনটি স্তরের ধারণার সঙ্গে পরিচিত হয়েছি। এর একটি হ'ল অন্তর্নিহিত পছন্দ। তৃতীয় পরিচ্ছেদে আমরা দেখেছি যে এই অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্কের কিছু বিশেষ গুণাবলি থাকলে তার যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণ সম্ভব। এবং এই সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণের ফলে যে-উপযোগ অপেক্ষক পাওয়া যায় তার ভিত্তিতে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের কিছু এম্পিরিকাল গুণাবলি আমরা নির্ধারণ করতে পারি। ভোক্তার আচরণ বিশ্লেষণে একটি বিকল্প দৃষ্টিভঙ্গি আমরা বর্তমান পরিচ্ছেদে আলোচনা করেছি। এই বিকল্পে সরাসরি চাহিদা অপেক্ষকের কল্পনা করা হয়ে থাকে। গোচরীভূত পছন্দ (প্রত্যক্ষ এবং অপ্রত্যক্ষ) সম্পর্ককে এই চাহিদা অপেক্ষক থেকে উৎসারিত বলে মনে করা যেতে পারে। বর্তমান অংশে উজাওয়ার প্রমাণ করা কয়েকটি প্রতিপাদ্যের ভিত্তিতে আমরা এই তিনটি স্তরের ধারণার মধ্যে সমন্বয় সাধনের চেষ্টা করব।

আলোচনার সুবিধার জন্য অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্ক ও চাহিদা অপেক্ষকের স্পষ্ট সংজ্ঞা আমরা নিচে উপস্থিত করছিঃ

অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্ক[1]ঃ অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্কের নির্দেশক P এমন একটি দ্বিনিধানী সম্পর্ক যে

(i) P অপ্রতিসমঃ দ্রব্যসমষ্টি স্পেস S-এর অন্তর্ভুক্ত যে-কোনো x, y-এর জন্য $(xPy) \to (y\bar{P}x)$;

(ii) P সংক্রমীঃ S-এর অন্তর্ভুক্ত যে-কোনো x, y, z-এর জন্য $(xPy)\ \&\ (yPz) \to (xPz)$;

1 অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্ককে আমরা এখানে স্পষ্ট পছন্দের অর্থে ব্যবহার করছি। প্রাসঙ্গিক চিহ্নটিও আমরা ব্যবহার করছি 'P'। তৃতীয় পরিচ্ছেদে আমরা যে দ্বিনিধানী সম্পর্ককে 'R' বলে চিহ্নিত করেছি তার ভিত্তিতে যে 'P' পাওয়া যায় বর্তমান অন্তর্নিহিত পছন্দের বর্ণনা সেই 'P'-এর সাহায্যে দেওয়া হচ্ছে।

(*iii*) P একমুখীঃ S-এর অন্তর্ভুক্ত যে-কোনো x, y-এর জন্য $x \geqslant y \rightarrow xPy$;

(*iv*) P নিরবচ্ছিন্নঃ S-এর অন্তর্ভুক্ত যে-কোনো x^0-এর জন্য $\{x|x^0Px, x \varepsilon S\}$ সেটটি S-এর একটি উন্মুক্ত সেট।[1]

চাহিদা অপেক্ষকঃ $x = h(p, M)$ একটি এমন চাহিদা অপেক্ষক যে (*i*) যে-কোনো ধনাত্মক মূল্যাবলি p এবং আয় M-এর জন্য অপেক্ষকটি সংজ্ঞায়িত হয়েছে;

(*ii*) যে-কোনো আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে কোনো একটি দ্রব্যসমষ্টি নির্বাচিত হবে; আবার যে-কোনো দ্রব্যসমষ্টি কোনো একটি উপযুক্ত আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে নির্বাচিত হবে;

(*iii*) বাজেট সমীকরণ পুরোপুরি সিদ্ধ—অর্থাৎ, ভোক্তা তার আর্থিক আয়ের সবটুকুই খরচ করে;

(*iv*) আয়-আপেক্ষিক লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত সিদ্ধ।

প্রতিপাদ্য 5.1 (উজ়াওয়া) আলোচ্য চাহিদা অপেক্ষকের বেলায় যদি হাউথেকার স্বীকার্য সিদ্ধ হয় তাহলে এই অপেক্ষক থেকে উৎসারিত অপ্রত্যক্ষ গোচরীভূত পছন্দ সম্পর্ক R^* একটি অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্ক।

প্রমাণঃ—প্রতিপাদ্যের প্রমাণের জন্য দেখানো প্রয়োজন যে R^*-এর বেলায় অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্কের (*i*)—(*iv*) সিদ্ধ।

হাউথেকার স্বীকার্য থেকে সরাসরি পাওয়া যাচ্ছে যে R^* অপ্রতিসম।

R^*-এর সংক্রমিতা প্রমাণের জন্য লক্ষ্য করা প্রয়োজন যে xR^*y এবং yR^*z দেওয়া থাকলে বুঝতে হবে যে x ও y-এর মধ্যবর্তী এবং y ও z-এর মধ্যবর্তী এমন দুটি সসীম দ্রব্যসমষ্টি ক্রম আছে যে

$xRx^1R \ldots Rx^nRyRy^1R \ldots Ry^nRZ$।

অতএব x ও z-এর মধ্যবর্তী $x^1, \ldots, x^n, y, y^1, \ldots, y^n$ এই $(2n+1)$ পদবিশিষ্ট সসীম দ্রব্যসমষ্টি ক্রম বর্তমান। অতএব xR^*z।

1 নিরবচ্ছিন্নতার এই সংজ্ঞা লক্ষণীয়। সংজ্ঞা 3.4.4-এর সঙ্গে এর কিন্তু কোনো বিরোধ নেই। কারণ, যে-কোনো সেট যদি উন্মুক্ত হয় তাহলে তার পূরক সেটটি বন্ধ। $\{x|x^0Px\}$-এর পূরক সেট হ'ল $\{x|x^0\bar{P}x\}$, অর্থাৎ $\{x|xRx^0\}$। তবে সংজ্ঞা 3.4.4-এর তুলনায় বর্তমান সংজ্ঞা শিথিলতর। আমরা আগে দেখেছি যে রেডারের প্রতিপাদ্যেও অনুরূপ শিথিল সংজ্ঞা ব্যবহার করা হয়েছে।

R^*-এর একমুখীনতা প্রমাণের জন্য মনে করা যাক $x \geqslant y$। x কোনো একটি আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে নির্বাচিত হবে। মনে করা যাক p^x মূল্যাবলিতে x বস্তুত নির্বাচিত হচ্ছে। যেহেতু x বৃহত্তর (অন্তত ক্ষুদ্রতর নয়) তাই $p^x x \geqslant p^x y$। অতএব, xR^*y।

R^*-এর নিরবচ্ছিন্নতা প্রমাণের জন্য মনে করা যাক x^b এমন একটি দ্রব্যসমষ্টি যে নির্দিষ্ট দ্রব্যসমষ্টি $x^0R^*x^b$। সংজ্ঞা অনুসারে তাহলে এমন একটি দ্রব্যসমষ্টি x^1 আছে যে

$$\text{হয় } x^0 = x^1 \text{ অথবা } x^0R^*x^1 \quad \ldots \quad (5.1)$$

এবং

$$p^1x^1 \geqq p^1x^b, \quad x^1 \neq x^b, \quad \ldots \quad (5.2)$$

অর্থাৎ, x^1Rx^b।

এখানে p^1 হ'ল এমন মূল্যাবলি যার জন্য x^1 বস্তুত নির্বাচিত হচ্ছে।

মনে করা যাক $x^2 = \frac{1}{2}(x^1 + x^b)$। এখন (5.2)-এর জন্য

$$p^1x^1 \geqq p^1x^2, \quad x^1 \neq x^2 \quad \ldots \quad (5.3)$$

যেহেতু,

$$p^1x^1 - p^1x^2 = p^1x^1 - p^1\left(\frac{x^1}{2} + \frac{x^b}{2}\right)$$

$$= \frac{p^1x^1}{2} - \frac{p^1x^b}{2}$$

$$\geqq 0।$$

অতএব, x^1Rx^2। স্যামুয়েলসন্ স্বীকার্য অনুসারে $x^2\bar{R}x^1$। অতএব, $p^2x^2 < p^2x^1$। এখানে p^2 এমন মূল্যাবলি যার জন্য x^2 বস্তুত নির্বাচিত।

এখন যেহেতু $p^2x^1 > p^2x^2$, তাই $p^2x^2 > p^2x^b$।

কারণ, $p^2x^1 > p^2x^2$

অথবা

$$p^2x^1 > p^2\left(\frac{x^1}{2} + \frac{x^b}{2}\right)$$

অথবা

$$p^2x^1 - \frac{p^2x^1}{2} - \frac{p^2x^b}{2} > 0$$

অথবা

$$\frac{p^2x^1}{2} - \frac{p^2x^b}{2} > 0$$

অথবা

$$p^2x^1 > p^2x^b \qquad \ldots(5 \cdot 4)$$

কিন্তু যদি $p^2x^2 \leqq p^2x^b$ হয়, তাহলে

$$p^2 \left(\frac{}{2} + \frac{}{2} \right) \leqq p^2x^b$$

অথবা

$$\frac{p^2x^1}{2} + \frac{p^2x^b}{2} - p^2x^b \leqq$$

অথবা

$$\frac{p^2x^1}{2} - \frac{p^2x^b}{2} \leqq 0$$

অথবা

$$p^2x^1 \leqq p^2x^b \text{।} \qquad \ldots(5 \cdot 5)$$

(5.5) যেহেতু (5.4)-এর সঙ্গে অসঙ্গতিপূর্ণ, তাই $p^2x^2 > p^2x^b$। অতএব, x^b-এর এমন একটি সামীপ্য[1] $N(x^b)$ আছে যে

$N(x^b)$-এর অন্তর্ভুক্ত সব x-এর জন্য

$$p^2x^2 > p^2x \text{।} \qquad \ldots(5 \cdot 6)$$

1 **সামীপ্যের সংজ্ঞা:** ইউক্লিডীয় স্পেস E^n-এর অন্তর্গত যে-কোনো বিন্দু x-এর ε-সামীপ্য $N\varepsilon(x) = \{y| \; ||y-x|| < \varepsilon\}$। ε-দূরত্বটিকে যখন নির্দিষ্ট করার প্রয়োজন নেই তখন সামীপ্যকে সোজাসুজি $N(x)$ হিসেবে চিহ্নিত করা হয়। সামীপ্যকে ইংরেজিতে বলা হয় নেবারহুড্।

এখন (5.1), (5.3) এবং (5.6) সম্পর্কগুলিকে একসঙ্গে নিলে আমরা পাই যে $N(x^b)$-এর অন্তর্ভুক্ত সব x-এর জন্য x^0R^*x। অতএব $\{x|x^0R^*x\}$ একটি উন্মুক্ত সেট। [Q.E.D.]

এখানে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে যথাযথ সাংখ্যিক প্রতিরূপায়ণের জন্য পছন্দ সম্পর্কের যে যে গুণ থাকা প্রয়োজন বর্তমান R^*-এর বেলায় তার সবকটি সিদ্ধ। অর্থাৎ, এই R^* সম্পর্কের প্রতিরূপায়ণ সম্ভব। অতএব, আলোচ্য চাহিদা অপেক্ষককে প্রতিরূপায়ণসম্ভব পছন্দ সম্পর্কের উৎসারক হিসেবে মনে করা যেতে পারে। উপরন্তু, এই উৎসারিত পছন্দ সম্পর্কের উত্তলতাও প্রমাণ করা যেতে পারে।[1]

প্রতিপাদ্য 5.2 (উজ়াওয়া) মনে করা যাক $x=h(p, M)$ একটি নির্দিষ্ট চাহিদা অপেক্ষক। h থেকে উৎসারিত R^* সম্পর্ক থেকে h-অপেক্ষকটি নির্ধারণ করা সম্ভব।

প্রমাণঃ— মনে করা যাক p^0, M^0 এই নির্দিষ্ট আয়-মূল্য পরিস্থিতিতে $x^0=h(p^0, M^0)$ হ'ল নির্দিষ্ট চাহিদা। মনে করা যাক বাজেট সেট $X(p^0, M^0)=\{x|p^0x\leqslant M^0\}$। স্পষ্টত, $X(p^0, M^0)$-এর অন্তর্গত সব x-এর জন্য x^0Rx, অর্থাৎ, x^0R^*x। আবার মনে করা যাক $x^0\varepsilon X(p^0, M^0)$ এবং $x^0R^*x, x\varepsilon X(p^0, M^0)$। এক্ষেত্রে নিশ্চয়ই $x^0=h(p^0, M^0)$। কারণ, মনে করা যাক $x'(x'\neq x^0)$ এমন একটি দ্রব্যসমষ্টি যে $x'=h(p^0, M^0)$। এক্ষেত্রে একদিকে x^0R^*x' এবং অন্যদিকে $x'R^*x^0$, যেহেতু, x' বস্তুত নির্বাচিত এবং $x^0, x'\varepsilon X(p^0, M^0)$। এই অসঙ্গতি প্রতিপাদ্যের প্রমাণ। [QED]

6. স্যামুয়েলসন্ স্বীকার্য ও হাউথেকার স্বীকার্যের সম্পর্ক

বর্তমান অংশে আমরা প্রমাণ করব যে চাহিদা অপেক্ষকের উপর একটি বাড়তি নিয়মিত শর্ত আরোপ করলে স্যামুয়েলসন্ স্বীকার্য থেকে হাউ-থেকার স্বীকার্য পাওয়া যায়।

নিয়মিত শর্তঃ মনে করা যাক p^a এবং p^b যে-কোনো দুটি নির্দিষ্ট মূল্যাবলি। p^a-মূল্যে যে-কোনো ধনাত্মক আয় M^a দেওয়া থাকলে একটি নতুন আয় M^b-এর সংজ্ঞা নিচে দেওয়া হ'লঃ

$$M^b = \rho_{b,a}(M^a) = \sup^1 \{M|h(p^a, M^a)R^*h(p^b, M)\} \quad \ldots(6\cdot1)$$

লক্ষণীয় যে M^a-এর মান বাড়লে M^b-এর মান কমতে পারে না, অর্থাৎ $\rho_{b,a}(M^a)$-অপেক্ষকটি অহ্রস্বমান।

নিয়মিত শর্তের অঙ্গীকারঃ বর্তমান আলোচনার জন্য আমরা অঙ্গীকার হিসেবে মেনে নেব যে যে-কোনো মূল্যাবলি p^a এবং p^b দেওয়া থাকলে $\rho_{b,a}(M^a)$ -অপেক্ষকটি **স্পষ্টত বর্ধিষ্ণু।**

আমাদের আলোচ্য চাহিদা অপেক্ষক যদি পূর্বোক্ত (i) — (iv) -এর মধ্যে লিপ্‌শিৎস্‌ শর্তের পরিবর্তে বর্তমান নিয়মিত শর্তের অংগীকার পালন করে তাহলে স্যামুয়েলসন্‌ স্বীকার্যের থেকে হাউথেকার স্বীকার্য পাওয়া সম্ভব। আর লিপ্‌শিৎস্‌ শর্ত ধ'রে নিলে প্রমাণ করা সম্ভব যে হাউথেকার স্বীকার্যের থেকে স্যামুয়েলসন্‌ স্বীকার্য তো বটেই, নিয়মিত শর্তও পাওয়া যায়।[2] বর্তমানে আমরা শুধু প্রথম প্রতিজ্ঞার প্রমাণ আলোচনা করব।

মনে করা যাক $h(p, M)$ এমন একটি চাহিদা অপেক্ষক যা স্যামু-য়েলসন্‌ স্বীকার্য এবং নিয়মিত শর্ত মেনে চলে। আমাদের প্রমাণ করা দরকার যে যে-কোনো ধনাত্মক x^0-এর জন্য

$$C = \{x|x > 0, \; x^0R^*x, \; xR^*x^0\} \qquad \ldots(6\cdot2)$$

এই সেটটি শূন্য।

মনে করা যাক $x^0 = h(p^0, M^0)$ এমন একটি দ্রব্যসংগ্রহ যার জন্য C

1 যে-কোনো সেট X-এর জন্য sup X-র সংজ্ঞাঃ sup $X = x^0$ যদি এবং একমাত্র যদি সব $x \varepsilon X$-এর জন্য $x \leqslant x^0$, অর্থাৎ $x^0 X$-এর একটি ঊর্ধ্বসীমা, এবং কোনো $x' < x^0$-এর জন্য x' X-এর ঊর্ধ্বসীমা নয়।

2 এই প্রতিজ্ঞার প্রমাণের জন্য দ্রঃ H. Uzawa—পূর্বোল্লিখিত, পৃঃ 21—22। এছাড়াও গোচরীভূত পছন্দ ও চাহিদা অপেক্ষকের প্রসঙ্গে লিপ্‌শিৎস্‌ শর্তের ভূমিকা নিয়ে বিশদ আলোচনার জন্য দ্রঃ L. Hurwicz & M. K. Richter—Revealed preference without demand continuity assumptions [পূর্বোল্লিখিত *Preferences, Utility and Demand*], পৃঃ 59-76।

সেটটি শূন্য নয়। মনে করা যাক $x^b=h(p^b, M^b) \varepsilon\ C$। $\bar{M}^b$-কে এমন একটি আয় হিসেবে নেওয়া হ'ল যার সংজ্ঞা

$$\bar{M}^b=\sup\{M|h(p^b, M)\varepsilon C\}। \quad ...(6\cdot3)$$

লক্ষ্য করা যাক যে (6.3) -কে লেখা যেতে পারে

$$\bar{M}^b=\sup \{M|h(p^0, M^0)\ R^*h(p^b, M)\}=\rho_{b,0}(M^0) \quad ...(6\cdot4)$$

নিয়মিত শর্তের জন্য $\rho_{b,0}(M^0)$ স্পষ্টত বর্ধিষ্ণু; অতএব

$$\bar{M}^b<\rho_{b,0}(M^0+\varepsilon) \quad ...(6\cdot5)$$

মনে করা যাক δ এমন একটি ধনাত্মক রাশি যে

$$\bar{M}^b+\delta<\rho_{b,0}(M^0+\varepsilon)। \quad ...(6\cdot6)$$

$\rho_{b,0}(M^0+\varepsilon)$ -এর সংজ্ঞা থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে

$$x^0R^*h(p^b, \bar{M}^b+\delta)। \quad ...(6\cdot7)$$

পক্ষান্তরে, যেহেতু $x^b=h(p^b, M^b)\varepsilon\ C$, তাই $h(p^b, M^b)R^*x^0$।

অতএব,

$$h(p^b, \bar{M}^b+\delta)R^*x^0 \quad ...(6\cdot8)$$

(6.7) এবং (6.8) একসঙ্গে (6.3) -এর সংজ্ঞার সঙ্গে অসংগতিপূর্ণ। এই অসংগতি প্রতিপাদ্যের প্রমাণ। [QED]

স্যামুয়েলসন্ প্রবর্তিত গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বের মূল কথা এই যে নিওক্ল্যাসিক্যাল উপযোগ অপেক্ষক বা ভোক্তার অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্কের অস্তিত্ব ধ'রে না নিলেও চাহিদা অপেক্ষকের পর্যবেক্ষণীয় গুণাবলি পাওয়া যেতে পারে। চাহিদা অপেক্ষকের পর্যবেক্ষণীয় গুণাবলি তত্ত্বগতভাবে নির্ণয় করাই যদি লক্ষ্য হয় তাহলে গোচরীভূত পছন্দ তত্ত্বকে নিওক্ল্যাসিকাল তত্ত্বের বিকল্প হিসেবে মনে করা চলে। কিন্তু প্রশ্ন হ'ল যে গোচরীভূত পছন্দের ব্যাখ্যায় প্রত্যক্ষভাবে উপযোগের ধারণা অনুপস্থিত বলেই কি একথা গ্রহণ করা চলে যে এই নতুন দৃষ্টিভঙ্গি উপযোগের ধারণাকে সম্পূর্ণভাবে বর্জন করতে পারছে? হাউথেকার প্রতিপাদ্য এবং উজাওয়ার সমন্বয় থেকে আমরা এই প্রশ্নের উত্তর পাচ্ছি। হাউথেকার

প্রতিপাদ্যে প্রমাণ করা হ'ল যে স্যামুয়েলসন্ স্বীকার্যকে একটু পরিবর্ধিত রূপে ব্যবহার করলে নিওক্ল্যাসিকাল উপযোগ অপেক্ষক নির্ণয় করা যেতে পারে। আর উজাওয়ার সমন্বয়ে দেখানো হ'ল যে হাউথেকারের পরিবর্ধন ও স্যামুয়েলসনের মূল স্বীকার্য একটি শর্তে তুল্যমূল্য। সেই শর্তই হ'ল উজাওয়ার নিয়মিতি শর্ত। নিয়মিতি শর্ত মেনে নিলে স্যামুয়েল-সনের গোচরীভূত পছন্দের সঙ্গে অন্তর্নিহিত পছন্দের তুল্যমূল্যতাও প্রমাণিত হয়ে যায়। আর নিওক্ল্যাসিকাল চিন্তায় যেহেতু অন্তর্নিহিত পছন্দ সম্পর্কই চাহিদা অপেক্ষকের ভিত্তি তাই এখন বলা চলে যে গোচরী-ভূত পছন্দও ঐ একই চাহিদা অপেক্ষকের ভিত্তি। এই বক্তব্য পূর্ণ প্রমাণের জন্য দেখানো প্রয়োজন যে চাহিদা অপেক্ষক থেকে উৎসারিত যে গোচরীভূত পছন্দ সম্পর্ক, সেই পছন্দ সম্পর্কের ভিত্তিতে আবার ঐ চাহিদা অপেক্ষকই নির্ণয় করা সম্ভব। উজাওয়ার সমন্বয়ে এই বক্তব্য পূর্ণ প্রতিষ্ঠা পেয়েছে।

ষষ্ঠ পরিচ্ছেদ

কিছু বিশেষ প্রসঙ্গ

1. উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণ

ভোক্তার সমস্যাকে আমরা এতোক্ষণ যে-ভাবে উপস্থিত করেছি তাতে দেখা গেছে ভোক্তা নির্দিষ্ট আর্থিক আয়কে দ্রব্যাদির নির্দিষ্ট মূল্যে বিভিন্ন দ্রব্যের মধ্যে এমনভাবে বণ্টন করতে চায় যে তার মোট উপযোগ যেন সর্বোচ্চ হয়। এই সর্বোচ্চ উপযোগ প্রাপ্তির সমস্যা সমাধানের জন্য ভোক্তার মোট উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ধারণ করতে হয়। সাধারণভাবে n-মাত্রিক ইউক্লিডীয় দ্রব্যসমষ্টি স্পেসের ক্ষেত্রে ভোক্তার মোট উপযোগ n-সংখ্যক স্বাধীন চলের উপর নির্ভরশীলঃ

$$U=U(x_1, \ \ldots, \ x_n) \qquad \ldots(1\cdot1)$$

অনেক সময়ে কিন্তু এমন হতে পারে যে এই n-সংখ্যক দ্রব্যকে ভোক্তার বিচারে বিভিন্ন গোষ্ঠীতে শ্রেণীবদ্ধ করা যায়। অর্থাৎ, এমন হতে পারে যে ভোক্তার বিচারে এই n-সংখ্যক দ্রব্যের মধ্যে মোট, ধরা যাক, তিনটি মাত্র ভিন্ন দ্রব্যগোষ্ঠী আছে। যেমন, 'খাদ্যদ্রব্য' একটা দ্রব্যগোষ্ঠী—বিভিন্ন ধরনের খাদ্য এই গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত এক একটি চল। তেমনি, মনে করা যাক 'বাসস্থান' এবং 'পরিধেয়' অন্য দুটি দ্রব্যগোষ্ঠী। এখন ভোক্তা তার আর্থিক আয়ের বণ্টন সমস্যা সমাধানের জন্য একসঙ্গে n-সংখ্যক দ্রব্যকে স্বাধীন চল হিসেবে মেনে নিয়ে বাজেট সমীকরণের শর্তাধীন (1.1)-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের চেষ্টা করতে পারে। আবার মূল সমস্যাটিকে সে দুই ধাপেও সমাধানের চেষ্টা করতে পারে। যেমন, প্রথম ধাপে তার লক্ষ্য হতে পারে মোট আর্থিক আয়কে দ্রব্যগোষ্ঠীগুলির মধ্যে বণ্টন করা; এবং পরের ধাপে এক একটি গোষ্ঠীর জন্য যে-আর্থিক আয় নির্দিষ্ট হ'ল সেই আয়কে ঐ গোষ্ঠীর অন্তর্গত দ্রব্যের মধ্যে সে বণ্টন করতে পারে। কিন্তু প্রশ্ন হ'লঃ এই দুই পদ্ধতির প্রয়োগে মূল সমস্যার সমাধান কি একই থাকবে না বদলে যাবে? অর্থাৎ, একসঙ্গে সব চলগুলির সাম্যমান নির্ধারণ করলে মানগুলি যা হবে দুই ধাপে সমাধান করলেও চলগুলির সাম্যমান কি তাই পাওয়া যাবে?

এই প্রশ্নের উত্তর নির্ভর করছে আলোচ্য উপযোগ অপেক্ষক (1.1) -এর প্রকৃতির উপর। মোট উপযোগ অপেক্ষকের বেলায় যদি কিছু বিশেষ শর্ত সিদ্ধ হয় তাহলে উপরের দুই পদ্ধতিতেই চলগুলির সাম্যমান অপরিবর্তিত থাকবে। কিন্তু ঐ সব বিশেষ শর্ত সিদ্ধ না হ'লে দুই ক্ষেত্রের সাম্যমান আলাদা হতে পারে। যদি আলোচ্য অপেক্ষকের বেলায় সাম্যমান ঐ দুই পদ্ধতিতে অপরিবর্তিত থাকে তাহলে বলা যেতে পারে উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণ সম্ভব হচ্ছে। কোনো উপযোগ অপেক্ষক $U=U(x_1, \ldots x_n)$ কে যদি

$$U=F[f^1(x^1), f^2(x^2), \ldots, f^s(x^s)] \qquad \ldots(1\cdot2)$$

এইভাবে লেখা যায় তাহলে বলা চলে যে অপেক্ষকটির পৃথকীকরণ সম্ভব হ'ল। 'লেখা যায়' কথাটির তাৎপর্য এই যে (1.2) থেকে নির্ধারিত F-এর মান এবং সরাসরি নির্ধারিত U-এর মান সমান। (1.2) -এর $x^1, \ldots, x^s$ প্রত্যেকে এক একটি উপভেক্টর। অর্থাৎ এক্ষেত্রে আমরা মূল n-সংখ্যক চলকে s-সংখ্যক দ্রব্যগোষ্ঠীতে শ্রেণীবদ্ধ করেছি এবং $f^1, \ldots, f^s$ হ'ল এক একটি ভিন্ন ভিন্ন দ্রব্যগোষ্ঠীর শ্রেণী উপযোগ অপেক্ষক। f-গুলিকে বিকল্পে শাখা উপযোগ অপেক্ষকও বলা হয়। (1.1) -কে (1.2) -এর রূপে প্রকাশ করতে পারলে আমরা বলি যে মোট উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণ সম্ভব হ'ল। অথবা বলা হয় যে এক্ষেত্রে মূল চলগুলির সেট $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$, S-গোষ্ঠীতে পৃথকীকরণযোগ্য।

একটু চিন্তা করলে বুঝতে পারা যায় যে উপযোগ অপেক্ষকের বা X সেট-এর চলগুলির পৃথকীকরণ সম্ভব হতে গেলে বিভিন্ন দ্রব্যগোষ্ঠীর মধ্যে পারস্পরিক অনির্ভরতা থাকার প্রয়োজন। মনে করা যাক 'খাদ্যদ্রব্য' এবং 'পরিধেয়' এই দুটি ভিন্ন দ্রব্যগোষ্ঠী। এদের যদি কোনো অর্থে ভিন্ন দ্রব্যগোষ্ঠী হিসেবে ভাবতে হয় তাহলে অবশ্যই এমন হওয়া দরকার যে 'খাদ্যদ্রব্য' গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত বিভিন্ন দ্রব্যের মধ্যে যে-ধরনের নির্ভরতার সম্পর্ক বর্তমান, 'খাদ্যদ্রব্যে'র অন্তর্গত কোনো দ্রব্য এবং 'পরিধেয়' গোষ্ঠীর অন্তর্গত কোনো দ্রব্যের মধ্যে নির্ভরতার সম্পর্ক তার তুলনায় শিথিলতর। ভোক্তার দৃষ্টিকোণ থেকে দ্রব্যগোষ্ঠীর অন্তর্গত দ্রব্যাদির মধ্যেকার সম্পর্ক এবং বিভিন্ন দ্রব্যগোষ্ঠীর পরস্পর সম্পর্কের ভিত্তিতে 'অনির্ভরতা'র ধারণাটির স্পষ্ট সংজ্ঞা নির্দেশ করা সম্ভব।

উপরের আলোচনা থেকে অনুমান করা গেল যে উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণ ধারণার একটি গাণিতিক ভিত্তি এবং সংলগ্ন একটি অর্থনৈতিক

তাৎপর্য আছে। আমাদের মূল আলোচ্য বিষয় স্বভাবতই ধারণাটির অর্থ-নৈতিক ব্যাখ্যা। তবে প্রসঙ্গত এর গাণিতিক ভিত্তি সম্বন্ধেও মোটামুটি একটা ধারণা থাকা প্রয়োজন। গাণিতিক দিক থেকে সমস্যাটি হ'ল এমন কতকগুলি শর্ত নির্ধারণ করা যে শর্তগুলি সিদ্ধ হ'লে উপরের (1.1) অপেক্ষককে (1.2)-এর রূপে লেখা সম্ভব হবে। চল্লিশের দশকের শেষে মূলত লিওনটিয়েফ্[1]-এর গবেষণায় এই গাণিতিক সমস্যার সমাধান করা হয়। পঞ্চাশ এবং ষাটের দশকে সোনো[2], স্ট্রোৎস্[3] গোল্ডম্যান-উজাওয়া[4] এবং গরম্যান্[5], পোলক[6] ইত্যাদির গবেষণায় পৃথকীকরণের অর্থনৈতিক তাৎপর্যের দিকটিও ক্রমশ আমাদের কাছে পরিষ্কার হয়ে ওঠে।

উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণ এবং দ্রব্যগোষ্ঠীর মধ্যেকার অনির্ভর-তার ধারণাকে স্পষ্ট করার উদ্দেশ্যে লিওনটিয়েফ্

$$_{ij}R=U_i/U_j \qquad \ldots(1\cdot3)$$

এই অপেক্ষকটিকে ব্যবহার করেছেন। এখানে U_i এবং U_j হ'ল যথাক্রমে i এবং j-তম দ্রব্যের পরিবর্তনজনিত U-অপেক্ষকের আংশিক ডেরিভেটিভ্। স্পষ্টত, $_{ij}R$-এর অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা হ'ল i এবং j-তম দ্রব্যের প্রান্তিক

---

1 W. Leontief—A note on the interrelation of subsets of independent variables of a continuous function with continuous first derivatives
[*Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.* 53, No. 4]

2 M. Sono—The effect of price changes on the demand and supply of separable goods
[*International Economic Review,* Vol. 2, 1960]

3 R. H. Strotz—The empirical implications of a utility tree
[*Econometrica,* Vol. 25, 1957]

পরিবর্তনীয়তার হার। এই প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার কোনো তৃতীয় দ্রব্য x_k-এর উপরে যদি নির্ভরশীল না হয় তাহলে

$$_{ij}R_k = \frac{U_j U_{ik} - U_i U_{jk}}{(U_j)^2} = 0; \qquad \ldots (1 \cdot 4)$$

এখানে লক্ষণীয় যে $_{ij}R_k$ যদি শূন্য হয় তাহলে $_{ji}R_k$-ও শূন্য। কারণ,

$$_{ji}R_k = \frac{U_i U_{jk} - U_j U_{ik}}{(U_i)^2}\text{।}$$

$_{ij}R_k$ শূন্য হ'লে $U_j U_{ik} = U_i U_{jk}$; অতএব $_{ji}R_k$-ও শূন্য। অর্থাৎ, i, j-তম দ্রব্যের প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার যদি তৃতীয় দ্রব্য x_k-এর উপর নির্ভরশীল না হয়, তাহলে j, i-তম দ্রব্যের প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হারও k-তম দ্রব্যের উপর নির্ভরশীল নয়। এখানে অবশ্যই $k \neq i, j$।

এই অনির্ভরতার ধারণা উদাহরণের সাহায্যে পরিষ্কার করা যেতে পারে। মনে করা যাক ভোক্তা A, B, C এই তিনটি দ্রব্য ভোগ করছে। A-এর নির্দিষ্ট পরিমাণের সঙ্গে B এবং C-এর দুই ভিন্ন পরিমাণ এমনভাবে দেওয়া আছে যে দুই ক্ষেত্রেই ভোক্তার মোট উপযোগ এক। মনে করা যাক

$$A=100,\ B=25,\ C=10$$

এবং

$$A=100,\ B=30,\ C=12,$$

মনে করা যাক এই দুই ক্ষেত্রেই ভোক্তার মোট উপযোগ $U=2$। এখন মনে করা যাক A-এর পরিমাণ দুই ক্ষেত্রেই একই রকম বাড়ানো হ'ল, কিন্তু B এবং C-এর পরিমাণ অপরিবর্তিত রইল। ধরা যাক

$$A=200,\ B=25,\ C=10,\ U=2 \cdot 8$$

$$A=200,\ B=30,\ C=12,\ U=2 \cdot 5,$$

এক্ষেত্রে স্পষ্টত B এবং C-এর প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার A-এর পরিমাণের উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ দ্রব্যগোষ্ঠী হিসেবে B এবং C-কে A-এর উপর অনির্ভর বলা চলে না। অতএব এই ক্ষেত্রে B এবং C-কে এক গোষ্ঠীতে শ্রেণীবদ্ধ করা যায় না। কিন্তু দ্বিতীয় উদাহরণে যদি দুই

ক্ষেত্রেই ভোক্তার উপযোগ, ধরা যাক, 2.8 থাকত তাহলে বলা যেত যে B এবং C-এর প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার A-এর পরিমাণের উপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে A একটি গোষ্ঠী এবং B, C-কে একত্রে আর একটি গোষ্ঠীভুক্ত মনে করা যেত।

দ্রব্যগোষ্ঠীর পারস্পরিক অনির্ভরতা এবং উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণের মধ্যে সম্পর্ক উপযুক্ত সংজ্ঞা এবং প্রতিপাদ্যের মাধ্যমে স্পষ্ট করা যেতে পারে। উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণের তিনটি ধারণা সম্ভব।

সংজ্ঞা 1.1

সরল পৃথকীকরণঃ উপযোগ অপেক্ষক $U=U(x_1, \ldots, x_n)$-এর **সরল পৃথকীকরণ** বলতে বোঝায় যে উপরের (1.1)-কে (1.2) হিসেবে লেখা সম্ভব।

সংজ্ঞা 1.2

স্পষ্ট পৃথকীকরণঃ উপযোগ অপেক্ষক $U=U(x_1, \ldots, x_n)$-এর **স্পষ্ট পৃথকীকরণ** বলতে বোঝায় যে (1.1)-কে

$$U=F[f^1(x^1)+ \ldots +f^s(x^s)] \qquad \ldots(1\cdot5)$$

হিসেবে লেখা সম্ভব।

সংজ্ঞা 1.3

যোগসম্ভব পৃথকীকরণঃ উপযোগ অপেক্ষক $U=U(x_1, \ldots, x_n)$-এর যোগসম্ভব পৃথকীকরণ বলতে বোঝায় (1.1)-কে

$$U=f^1(x^1)+ \ldots +f^s(x^s) \quad (s=n) \qquad \ldots(1\cdot6)$$

হিসেবে লেখা সম্ভব।

পরিষ্কার দেখতে পাওয়া যাচ্ছে যে যোগসম্ভব পৃথকীকরণের বেলায় গোষ্ঠীসংখ্যা এবং দ্রব্যসংখ্যা সমান; অর্থাৎ, প্রত্যেকটি দ্রব্যই এক একটি গোষ্ঠী। এর তাৎপর্য এই যে যে-কোনো দ্রব্যের উপযোগ অন্য কোনো দ্রব্যের পরিমাণের (বা তার উপযোগের) উপর নির্ভর করে না। দ্বিতীয় পরিচ্ছেদে আংশিক সাম্যাবস্থার প্রসঙ্গে এই পরিস্থিতির বিশ্লেষণ করা

হয়েছে। বর্তমানে তাই **সরল পৃথকীকরণ** ও **স্পষ্ট পৃথকীকরণ** নিয়ে বিশদ আলোচনা করা হবে।

পৃথকীকরণের সংজ্ঞা দ্রব্যগোষ্ঠীর অনির্ভরতার সাহায্যেও দেওয়া যায়। মনে করা যাক $\{N_1, \ldots, N_s\}$ আলোচ্য n-সংখ্যক দ্রব্যের একটি শ্রেণীবিভাগ।

সংজ্ঞা (1.1a)

$U=U(x_1, \ldots, x_n)$ উপযোগ অপেক্ষকের **সরল পৃথকীকরণ** বলতে বোঝায়

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_j(x_1, \ldots, x_n)}\right\}=0, \text{ সব } i, j \in N_s,\ k \notin N_s \quad .(1\cdot7)$$

সংজ্ঞা (1.2a)

$U=U(x_1, \ldots, x_n)$ উপযোগ অপেক্ষকের **স্পষ্ট পৃথকীকরণ** বলতে বোঝায়

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_j(x_1, \ldots, x_n)}\right\}=0, \text{ সব } i \in N_s,\ j \in N_t,\ k \notin N_s U N_t (s \neq t) \quad \ldots(1\cdot8)$$

পৃথকীকরণের সংজ্ঞা যে দু'রকমভাবে দেওয়া হ'ল তার যৌক্তিকতা এখানে যে এর যে-কোনো একটি সংজ্ঞা থেকে অন্যটিকে প্রমাণ করা যায়। অর্থাৎ, প্রমাণ করা সম্ভব যে সংজ্ঞা (1.1) থেকে (1.7) এবং (1.7) থেকে সংজ্ঞা (1.1) পাওয়া যায়। আবার সংজ্ঞা (1.2) ধরে নিলে প্রমাণ করা যায় যে (1.8) সিদ্ধ এবং (1.8) থেকে সংজ্ঞা (1.2) পাওয়া যায়। অতএব, এই দু'রকমের সংজ্ঞা ন্যায়তাত্ত্বিক বিচারে তুল্যমূল্য। এই তুল্যমূল্যতার পূর্ণাঙ্গ প্রমাণ এখানে উপস্থিত করা হচ্ছে না।[1] বদলে আমরা বর্তমানে প্রমাণ করছি যে সংজ্ঞা (1.1) থেকে (1.7)-এর শর্ত এবং সংজ্ঞা (1.2) থেকে (1.8)-এর শর্ত পাওয়া যায়।

মনে করা যাক উপযোগ অপেক্ষক

$$U=U(x_1, \ldots, x_n)$$
$$=F[f^1(x^1), \ldots, f^s(x^s)]।$$

---

1 পূর্ণাঙ্গ প্রমাণের জন্য দ্রঃ Goldman & Uzawa—পূর্বোল্লিখিত।

এক্ষেত্রে $i, j \varepsilon N_s$-এর জন্য

$$\frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_j(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{f_i^s(x^s)}{f_j^s(x^s)} \quad \ldots(1\cdot 9)$$

স্পষ্টত, (1.9) N_s-এর অন্তর্ভুক্ত নয় এমন কোনো k-এর জন্য যে x_k তার উপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_j(x_1, \ldots, x_n)}\right\} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{f_i^s(x^s)}{f_j^s(x^s)}\right\} = 0 \text{ ।}$$

বর্তমান উপযোগ অপেক্ষকের বেলায় তাহলে দেখা গেল যে i, j-তম দ্রব্য যে-দ্রব্যগোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত সেটা ছাড়া অন্য কোনো গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যের পরিমাণ যাই হোক না কেন i, j-তম দ্রব্যের প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার তার উপর নির্ভর করে না। অর্থাৎ, i, j-তম দ্রব্য তাদের নিজস্ব গোষ্ঠীভুক্ত নয় এমন দ্রব্যের উপর নির্ভরশীল নয়। এই অনির্ভরতা পৃথকীকরণের মূল কথা।

একই রকমে দেখানো যায় যে উপযোগ অপেক্ষক যদি স্পষ্ট পৃথকীকরণের সংজ্ঞা (1.2) মেনে চলে তাহলে

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_j(x_1, \ldots, x_n)}\right\} = 0, \text{ সব } i \varepsilon N_s,\ j \varepsilon N_t, \text{ এবং } k \notin N_s \cup N_t (s \neq t)$$

উপযোগ অপেক্ষকের স্পষ্ট পৃথকীকরণ সম্ভব হ'লে

$$U = F[f^1(x^1) + \ldots + f^s(x^s)] \text{ ।}$$

অতএব,

$$\frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_j(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{f_i^s(x^s)}{f_j^t(x^t)},\ i \varepsilon N_s,\ j \varepsilon N_t\ (s \neq t) \text{ ।} \quad \ldots(1\cdot 10)$$

স্পষ্টত, k যদি $N_s U N_t$-এর অন্তর্ভুক্ত না হয় তাহলে (1.10) x_k-এর উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব,

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_j(x_1, \ldots, x_n)}\right\} = 0, \text{ সব } i \varepsilon N_s,\ j \varepsilon N_t, \text{ এবং } k \notin N_s U N_t (s \neq t) \text{ ।}$$

পৃথকীকরণঃ দুটি উদাহরণ

(1) ভোক্তার আচরণ সংক্রান্ত এম্পিরিকাল গবেষণায় দ্বিঘাত উপযোগ অপেক্ষকের ব্যবহার প্রায়ই লক্ষ্য করা যায়। দুটি দ্রব্যের বেলায় দ্বিঘাত উপযোগ অপেক্ষকের রূপ হ'লঃ

$$U=a_1x_1+a_2x_2+\tfrac{1}{2}(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2) \qquad \ldots(1\cdot11)$$

এই উপযোগ অপেক্ষককে একটু পরিবর্তিত রূপে এমনভাবে নেওয়া যায় যে অপেক্ষকটির পৃথকীকরণ সম্ভব হয়।[1] মনে করা যাক আমাদের আলোচ্য দ্রব্য তিনটি—x_1, x_2, x_3। এর মধ্যে x_1-এর অন্তর্ভুক্ত আছে দুটি উপদ্রব্য—x_{11} এবং x_{12}। মনে করা যাক

$$x_1=b_1x_{11}+b_{12}x_{12} \qquad \ldots(1\cdot12)$$

আলোচ্য তিনটি দ্রব্যের ক্ষেত্রে আমরা দ্বিঘাত উপযোগ অপেক্ষককে লিখতে পারিঃ

$$U=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\tfrac{1}{2}(a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+$$
$$2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2) \qquad \ldots(1\cdot13)$$

(1.13)-এর অপেক্ষক থেকে হিসাব করলে আমরা পাইঃ

$$\frac{\partial U}{\partial x_{11}}\Big/\frac{\partial U}{\partial x_{12}}=\frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_{11}}\Big/\frac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_{12}}=\frac{b_1}{b_2} \qquad \ldots(1\cdot14)$$

(1.14) x_2, x_3-এর উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব, দুটি উপদ্রব্য সমেত প্রথম দ্রব্য (গোষ্ঠী) দ্বিতীয় বা তৃতীয় দ্রব্যের উপর নির্ভরশীল নয়। অর্থাৎ, গোষ্ঠী হিসেবে প্রথম দ্রব্যগোষ্ঠীকে অন্য দ্রব্যের থেকে পৃথক করা সম্ভব। অতএব (1.13)-এর ক্ষেত্রে সরল পৃথকীকরণ সম্ভব।

এখানে লক্ষ্য করা যেতে পারে যে x_{11} এবং x_{12} এই দুই উপদ্রব্যের মধ্যেকার প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার যদিও x_2 এবং x_3-এর উপর নির্ভর করে না, পৃথকভাবে এদের প্রান্তিক উপযোগ কিন্তু x_2 এবং x_3-এর উপর নির্ভরশীল। কারণ,

$$\frac{\partial U}{\partial x_{11}}=(a_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)b_1$$

এবং

$$\frac{\partial U}{\partial x_{12}}=(a_1+a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)b_2 \text{ ।}$$

(1.13) -কে সহজেই এমন রূপে লেখা যায় যে স্পষ্ট পৃথকীকরণ সম্ভব হয়। মনে করা যাক $a_{ij}=0$ $(i \neq j)$ । তাহলে (1.13) দাঁড়ালঃ

$$U=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\tfrac{1}{2}(a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2) \quad \ldots(1\cdot15)$$

এই ক্ষেত্রে

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_{11}}\Big/\frac{\partial U}{\partial x_2}&=\frac{(a_1+a_{11}x_1)b_1}{a_2+a_{22}x_2}\\
\frac{\partial U}{\partial x_{11}}\Big/\frac{\partial U}{\partial x_3}&=\frac{(a_1+a_{11}x_1)b_1}{a_3+a_{33}x_3}\\
\frac{\partial U}{\partial x_{12}}\Big/\frac{\partial U}{\partial x_2}&=\frac{(a_1+a_{11}x_1)b_2}{a_2+a_{22}x_2}\\
\frac{\partial U}{\partial x_{12}}\Big/\frac{\partial U}{\partial x_3}&=\frac{(a_1+a_{11}x_1)b_2}{a_3+a_{33}x_3}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(1\cdot16)$$

(1.16) থেকে দেখা যাচ্ছে যে x_{11} এবং x_2-এর প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার x_{11}-এর নিজস্ব গোষ্ঠী x_1 এবং x_2 ছাড়া অন্য দ্রব্যের উপর নির্ভরশীল নয়। x_{11} এবং x_3-এর ক্ষেত্রেও নির্ভরশীলতা অনুরূপ। আবার x_{12} এবং x_2-এর প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার x_1 এবং x_2-এর উপরেই মাত্র নির্ভরশীল। x_{12} এবং x_3-এর ক্ষেত্রেও এই হার x_2-এর উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব বর্তমান উপযোগ অপেক্ষকের স্পষ্ট পৃথকীকরণ সম্ভব।

(2) মনে করা যাক n-সংখ্যক দ্রব্যের একটি উপযোগ অপেক্ষক দেওয়া আছেঃ

$$U=x_1^{\beta_1}\,x_2^{\beta_2}\,\ldots\,x_n^{\beta_n} \text{ ।} \quad \ldots(1\cdot17)$$

এই n-সংখ্যক দ্রব্যকে যে-কোনো ভাবেই শ্রেণীবদ্ধ[1] করা হোক না কেন

1 আমরা অবশ্যই ধরে নিচ্ছি যে আলোচ্য শ্রেণীবিভাগ এমন যে কোনো একটি দ্রব্য দুই শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত হচ্ছে না।

উপযোগ অপেক্ষকের সরল পৃথকীকরণ এবং স্পষ্ট পৃথকীকরণ দুইই সম্ভব হবে।

মনে করা যাক দ্রব্যগুলিকে $(x_1, \ldots, x_g)$, $(x_h, \ldots, x_j)$ এবং $(x_k, \ldots, x_n)$ এই তিনটি শ্রেণীতে বিভক্ত করা হ'ল। (1.17)-এর লগারিদম্ নিলে আমরা পাইঃ

$$U^* = \log U = \beta_1 \log x_1 + \ldots + \beta_n \log x_n$$
$$= (\beta_1 \log x_1 + \ldots + \beta_g \log x_g) + (\beta_h \log x_h + \ldots + \beta_j \log x_j) + (\beta_k \log x_k + \ldots + \beta_n \log x_n) \quad \ldots(1\cdot18)$$

এখন

$$U_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial U^*} \cdot \frac{\partial U^*}{\partial x_i} = U\beta_i/x_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

অতএব,

$$U_i/U_t = (\beta_i/x_i) / (\beta_t/x_t) \; (i, t=1, \ldots, n) \qquad \ldots(1\cdot19)$$

লক্ষণীয় যে (1.19)-এর i, t-তম দ্রব্যের প্রান্তিক পরিবর্তনীয়তার হার i, t-তম দ্রব্য ব্যতীত অন্য কোনো দ্রব্যের উপর নির্ভরশীল নয়। অতএব,

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\{(\beta_i/x_i)/(\beta_t/x_t)\} = 0, \qquad \ldots(1\cdot20)$$

এখানে i, t তিনটি শ্রেণীব যে-কোনোটির অন্তর্ভুক্ত হতে পারে, কিন্তু p সেই শ্রেণীর বহির্ভূত। (1.20) থেকে দেখা যাচ্ছে যে (1.17)-এর সরল পৃথকীকরণ সম্ভব।

(1.18) থেকে উপরন্তু এও দেখা যাচ্ছে যে i, t যদি দুই ভিন্ন শ্রেণীর অন্তর্ভুক্ত হয়, তাহলেও তৃতীয় শ্রেণীভুক্ত যে-কোনো p-এর জন্য

$$\frac{\partial}{\partial x_p}\{U_i/U_t\} = \frac{\partial}{\partial x_p}\{(\beta_i/x_i)/(\beta_t/x_t)\} = 0$$

অতএব, (1.17)-এর স্পষ্ট পৃথকীকরণও সম্ভব হচ্ছে।

2. শর্তসাপেক্ষ চাহিদা অপেক্ষক

উপরের আলোচনায় আমরা উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণের ধারণাটিকে ব্যাখ্যা করার চেষ্টা করেছি। সংশ্লিষ্ট সংজ্ঞার সাহায্যে আমরা

এটাও দেখেছি যে পৃথকীকরণের ধারণার সঙ্গে দ্রব্যাদির পরস্পর অনির্ভর-তার একটা সম্পর্ক রয়েছে। এবং এই অনির্ভরতার ভিত্তিতে ভোক্তার ব্যবহার্য দ্রব্যাদিকে ভিন্ন ভিন্ন গোষ্ঠীতেও ভাগ করা সম্ভব। এই প্রসঙ্গে অন্য একটি বিষয়ও আলোচনার যোগ্য। চাহিদা তত্ত্বের নিওক্ল্যাসিকাল কাঠামোয় উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের সমস্যার সমাধান হিসেবে ভোক্তার সাম্যাবস্থা নির্ধারণ করা হয়; এবং সেই সাম্যাবস্থার ভিত্তিতে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকের বিভিন্ন এম্পিরিকাল গুণাবলি পাওয়া যায়। অতএব চাহিদা অপেক্ষকের গুণাবলি নিশ্চয়ই তাহলে অন্তর্নিহিত উপযোগ অপেক্ষকের গুণাবলির উপর নির্ভরশীল। আমরা দ্বিতীয় এবং চতুর্থ পরিচ্ছেদে চাহিদা অপেক্ষকের যে-সব গুণাবলি নির্ধারণ করেছি তার পিছনে রয়েছে উপযোগ অপেক্ষকের উপর আরোপ করা কিছু সাধারণ নিষেধ শর্ত—যেমন, নিরবচ্ছিন্নতা, প্রয়োজনীয় ডেরি-ভেটিভ্ সমূহের অস্তিত্ব ইত্যাদি। আংশিক সাম্যাবস্থার প্রসঙ্গে প্রত্যেকটি দ্রব্যের মধ্যে পরস্পর অনির্ভরতার শর্তও বিশ্লেষণ করা হয়েছে। এই অনির্ভরতার সাধারণীকৃত ধারণা হ'ল বর্তমান প্রসঙ্গের পৃথকীকরণ। অতএব, মনে করা যেতে পারে যে পৃথকীকরণের কল্পনা উপযোগ অপে-ক্ষকের উপর আরোপ করা একটি বাড়তি নিষেধ শর্ত। কাজেই স্বাভাবিক ভাবে এ প্রশ্ন উঠতে পারেঃ এই বাড়তি নিষেধ শর্ত আরোপ করার ফলে আমরা চাহিদা অপেক্ষকের কি কি বাড়তি গুণাবলি নির্ধারণ করতে পারি? শর্তসাপেক্ষ চাহিদা অপেক্ষকের ধারণার সাহায্যে আমরা এই প্রশ্নের উত্তর দিতে পারি।

মনে করা যাক আলোচ্য n-সংখ্যক দ্রব্যকে θ এবং $\bar{\theta}$ এই দুই শ্রেণীতে বিভক্ত করা হয়েছে। উপরন্তু, ধরে নেওয়া যাক যে, $\bar{\theta}$-এর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যাদির পরিমাণ যে-ভাবেই হোক পূর্বনির্দিষ্ট। অর্থাৎ, $\bar{\theta}$-এর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যাদির কোনটি ভোক্তা কতোটুকু কিনবে তা আগেই নির্ধারিত হয়ে গেছে। অর্থাৎ, $\bar{\theta}$-এর উপর মোট ব্যয়ও পূর্বনির্দিষ্ট। বর্তমানে সে কেবল θ-এর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যাদির পরিমাণ নির্বাচন করতে পারে। মনে করা যাক θ-এর দ্রব্যাদি কিনবার জন্য তার মোট আর্থিক আয় M_θ। বর্তমানে ভোক্তার সাম্যাবস্থা নির্ধারণের সমস্যাটি হ'লঃ

$$\sum_{i \in \theta} p_i x_i = M_\theta \qquad \ldots(2 \cdot 1)$$

এবং

$$x_k = \bar{x}_k \ (k \varepsilon \bar{\theta}) \qquad \ldots(2\cdot2)$$

শর্তাধীন

$$U = U(x_1, \ldots, x_n) \qquad \ldots(2\cdot3)$$

এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয় করা।

(2.1) — (2.3) -এর সমস্যা সমাধান করতে পারলে $x_i (i\varepsilon\theta)$ -এর যে-সাম্যমান নির্ধারিত হবে তা $p_i(i\varepsilon\theta)$, M_θ এবং $\bar{x}_k(k\varepsilon\bar{\theta})$ -এর উপর নির্ভরশীল হবে। অর্থাৎ,

$$x_i = x_i \ (P_\theta, M_\theta, \bar{x}) \ (i \varepsilon \theta); \qquad \ldots(2\cdot4)$$

এখানে $P_\theta = \{p_i\} (i\varepsilon\theta)$ হ'ল θ-এর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যমূল্যের ভেক্টর এবং $\bar{x} = \{\bar{x}_k\} (k\varepsilon\bar{\theta})$ হ'ল $\bar{\theta}$-এর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যের পূর্বনির্দিষ্ট পরিমাণের ভেক্টর। (2.4) হ'ল i-তম দ্রব্যের শর্তসাপেক্ষ চাহিদা অপেক্ষক।

এখন মনে করা যাক উপযোগ অপেক্ষকের সরল পৃথকীকরণ সম্ভব। অর্থাৎ,

$$U = U(x_1, \ldots, x_n)$$
$$= F[f^1(x^1), \ldots, f^s(x^s)]।$$

ধরা যাক এই S-সংখ্যক দ্রব্যগোষ্ঠীর মধ্যে একমাত্র r-তম গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যাদি ছাড়া অন্যান্য গোষ্ঠীর দ্রব্যাদির পরিমাণ পূর্বনির্ধারিত। r-তম গোষ্ঠীর দ্রব্যাদির শর্তসাপেক্ষ চাহিদা অপেক্ষক নির্ধারণের জন্য

$$\sum_{j=1}^{n_r} x_{rj} \, p_{rj} = M_r \qquad \ldots(2\cdot5)$$

এবং

$$x_{qk} = \bar{x}_{qk} \qquad \ldots(2\cdot6)$$

শর্তাধীন

$$U = F[f^1(x^1), \ldots, f^r(x^r), \ldots, f^s(x^s)] \qquad \ldots(2\cdot7)$$

এর সর্বোচ্চ মান নির্ধারণ করতে হবে। এখানে n_r = r-তম গোষ্ঠীর দ্রব্যসংখ্যা; q = পূর্বনির্ধারিত দ্রব্যগোষ্ঠী এবং $q \neq r$।

এখন (2.6)-কে (2.7)-এর মধ্যে বসালে আমরা পাই

$$U = F[f^1(\bar{x}^1), \ldots, f^r(x^r), \ldots, f^s(\bar{x}^s)] \qquad \ldots(2\cdot8)$$

অতএব ভোক্তার সমস্যা দাঁড়াল (2.5)-এর শর্তাধীন (2.8)-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়। যেহেতু $f^r(x^r)$ ছাড়া অন্যান্য শাখা উপযোগ অপেক্ষকগুলির মান এখন পূর্বনির্দিষ্ট তাই (2.5)-এর শর্তাধীন $f^r(x^r)$-এর সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের সমস্যাটিকে সমাধান ক'রে আমরা r-তম দ্রব্যগোষ্ঠীর শর্ত-সাপেক্ষ চাহিদা অপেক্ষক পেতে পারি। এই চাহিদা অপেক্ষকগুলিকে লেখা যেতে পারে

$$x_{rj} = x_{rj} \quad (P_r, M_r) \ (j = 1, \ldots, n_r); \qquad \ldots(2\cdot9)$$

এখানে P_r হ'ল r-তম গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যমূল্যের ভেক্টর। (2.9)-এর তাৎপর্য এই যে উপযোগ অপেক্ষকের সরল পৃথকীকরণ সম্ভব হ'লে যে-কোনো দ্রব্যগোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণকে ঐ গোষ্ঠীর দ্রব্যমূল্য এবং ঐ গোষ্ঠীর জন্য নির্দিষ্ট আর্থিক আয়ের উপর নির্ভরশীল হিসেবে প্রকাশ করা যেতে পারে। এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে সাধারণ সাম্যাবস্থায় যে-কোনো দ্রব্যের চাহিদা যে-কোনো দ্রব্যের মূল্যের উপর নির্ভরশীল হওয়া সত্ত্বেও পৃথকীকরণের ক্ষেত্রে কিন্তু একটি শাখার (বা গোষ্ঠীর) অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণ শুধুমাত্র সেই শাখাভুক্ত দ্রব্যমূল্য এবং প্রাসঙ্গিক আর্থিক আয়ের উপর মাত্র নির্ভরশীল। অন্যান্য শাখাভুক্ত দ্রব্যমূল্য আলোচ্য শাখাভুক্ত দ্রব্যের চাহিদার পরিমাণকে প্রভাবিত করছে না তা নয়, তবে সেই প্রভাব কার্যকরী হচ্ছে শুধুমাত্র আলোচ্য শাখার জন্য নির্দিষ্ট আর্থিক আয়ের মধ্য দিয়ে। চাহিদা অপেক্ষকের উপর নিষেধ শর্ত হিসেবে উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণের, অর্থাৎ দ্রব্যগোষ্ঠীর পারস্পরিক অনির্ভরতার, এটাই হ'ল এম্পিরিকাল তাৎপর্য।

চাহিদা অপেক্ষকের এম্পিরিকাল গবেষণার ক্ষেত্রে এই তাত্ত্বিক ফলের সুবিধা এই যে উপযোগ অপেক্ষকের শাখা-বিন্যাস বা দ্রব্যাদির মধ্যেকার অনির্ভরতার সম্পর্ক পুরোপুরি জানা থাকলে কোনো একটি দ্রব্যের চাহিদা অপেক্ষক হিসাব করতে গেলে স্বাধীন চল হিসেবে ঐ দ্রব্য যে-গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত সেই গোষ্ঠীর দ্রব্যমূল্য এবং ঐ গোষ্ঠীর জন্য নির্দিষ্ট আর্থিক আয়কে নিলেই চলবে। অন্যান্য গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যমূল্যকে উপেক্ষা করলেও আলোচ্য চাহিদা অপেক্ষকের ক্ষতি হবে না।

উপরের আলোচনা থেকে দেখা গেল যে সরল পৃথকীকরণের ক্ষেত্রে ভিন্ন গোষ্ঠীর দ্রব্যমূল্য বা মোট আয় প্রত্যক্ষভাবে চাহিদা অপেক্ষককে প্রভাবিত করে না। তবে যে-কোনো গোষ্ঠীর বেলাতেই কিন্তু অপ্রত্যক্ষভাবে অন্য গোষ্ঠীর দ্রব্যমূল্য বা মোট আয়ের প্রভাব চাহিদা অপেক্ষকের উপর বর্তমান। কারণ, যে-কোনো গোষ্ঠীর উপর নির্দিষ্ট আয়ের পরিমাণ কতো হবে তা নির্ভর করছে ভোক্তার মোট আয় এবং অন্যান্য গোষ্ঠীর দ্রব্যমূল্যের উপর। অর্থাৎ, r-তম গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত যে-কোনো দ্রব্যের চাহিদার উপর q-তম গোষ্ঠীর $(q \neq r)$ অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যমূল্যের পরিবর্তনের প্রভাব আলোচনা করা যেতে পারে। একই কারণে মোট আয়ের পরিবর্তন হ'লে r-তম গোষ্ঠীর যে-কোনো দ্রব্যের উপর তার কি প্রভাব হবে সেটাও আলোচনার যোগ্য। এই উদ্দেশ্যে আমরা p_{qk} এবং M-এর পরিবর্তনজনিত (2.9) -এর ডেরিভেটিভগুলি নির্ণয় করতে পারিঃ

$$\frac{\partial x_{rj}}{\partial p_{qk}} = \frac{\partial x_{rj}}{\partial M_r} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial p_{qk}} \quad (q \neq r) \qquad \ldots(2 \cdot 10)$$

$$\frac{\partial x_{rj}}{\partial M} = \frac{\partial x_{rj}}{\partial M_r} \cdot \frac{\partial M_r}{\partial M} \qquad \ldots(2 \cdot 11)$$

(2.10) এবং (2.11) থেকে আমরা পাই যে

$$\frac{\partial x_{rj}}{\partial p_{qk}} = \left(\frac{\partial x_{rj}}{\partial M} \Big/ \frac{\partial M_r}{\partial M} \right) \frac{\partial M_r}{\partial p_{qk}}$$

$$= \left(\frac{\partial M_r}{\partial p_{qk}} \Big/ \frac{\partial M_r}{\partial M} \right) \frac{\partial x_{rj}}{\partial M}$$

$$= \mu_r \frac{\partial x_{rj}}{\partial M} \; ; \qquad \ldots(2 \cdot 12)$$

এখানে $\mu_r = \left(\frac{\partial M_r}{\partial p_{qk}} \Big/ \frac{\partial M_r}{\partial M} \right)$

(2.12) -এর তাৎপর্য এই যে r-তম গোষ্ঠীর j-তম দ্রব্যের চাহিদার উপর q-তম গোষ্ঠীর k-তম দ্রব্যমূল্যের পরিবর্তনের প্রভাব r-তম গোষ্ঠীর j-তম দ্রব্যের চাহিদার উপর ভোক্তার মোট আয়ের পরিবর্তনের প্রভাবের আনুপাতিক। লক্ষণীয় যে এই সংশ্লিষ্ট অনুপাত কিন্তু r-তম গোষ্ঠীর সব দ্রব্যের জন্য একই। অর্থাৎ, যে-গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত দ্রব্যের চাহিদার

উপর প্রভাব নির্ণয় করা হচ্ছে সেই গোষ্ঠীর যে-কোনো দ্রব্যের জন্যই ঐ অনুপাত নির্দিষ্ট। (2.12) থেকে আমরা আরো পাচ্ছি যে r-তম গোষ্ঠীর অন্তর্ভুক্ত দুটি দ্রব্য i, j-এর জন্য

$$\frac{\partial x_{ri}/\partial p_{qk}}{\partial x_{rj}/\partial p_{qk}} = \frac{\partial x_{ri}/\partial M}{\partial x_{rj}/\partial M}\text{।} \qquad \ldots(2\cdot13)$$

3. পৃথকীকরণ, পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতা

বিভিন্ন দ্রব্যের মধ্যে পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার সম্পর্ক আমরা চতুর্থ পরিচ্ছেদে আলোচনা করেছি। পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার আলোচনা থেকে দ্রব্যাদির মধ্যেকার পারস্পরিক নির্ভরতার সম্বন্ধে আমরা একটা ধারণা পেতে পারি। বর্তমান পরিচ্ছেদে উপযোগ অপেক্ষকের পৃথকীকরণ সম্বন্ধে যে-ধারণা উপস্থিত করা হ'ল তাও দ্রব্যাদির বা দ্রব্য-গোষ্ঠীর মধ্যেকার নির্ভরতা-অনির্ভরতার উপর নির্ভরশীল। অতএব পৃথকীকরণের ধারণার সংগে পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার ধারণার যোগাযোগ লক্ষ্য করা যেতে পারে। বর্তমান অংশে পূর্ণাংগ প্রমাণ[1] ছাড়া পৃথকীকরণ, পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার সম্পর্ক নির্দেশ করা হবে।

দ্রব্যাদির মধ্যেকার অনির্ভরতার একটি সংজ্ঞা দ্বিতীয় আংশিক ডেরি-ভেটিভের সাহায্যে দেওয়া যেতে পারে। i, j তম দ্রব্যের মধ্যে যদি পরস্পর নির্ভরতার সম্পর্ক না থাকে তাহলে

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0\text{।} \qquad \ldots(3\cdot1)$$

অর্থাৎ, i-তম দ্রব্যের প্রান্তিক উপযোগ j-তম দ্রব্যের পরিমাণের উপর নির্ভর করে না। i-তম দ্রব্যের প্রান্তিক উপযোগ যদি j-তম দ্রব্যের পরিমাণ বৃদ্ধির সংগে সংগে বৃদ্ধি পায় তাহলে বলা যেতে পারে যে i, j-তম দ্রব্য পরস্পর পরিপূরক; আর i-তম দ্রব্যের প্রান্তিক উপযোগ যদি j-তম দ্রব্যের পরিমাণ বৃদ্ধির সংগে সংগে হ্রাস পায় তাহলে বলা যেতে পারে যে দ্রব্যদুটি পরস্পর পরিবর্তনীয়। অর্থাৎ,

পরিপূরকতার জন্য

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i\, \partial x_j} > 0 \qquad \ldots(3\cdot2)$$

1 প্রমাণের জন্য দ্রঃ Goldman & Uzawa—পূর্বোল্লিখিত।

এবং পরিবর্তনীয়তার জন্য

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \ \partial x_j} < 0 \text{।} \qquad \ldots(3\cdot3)$$

(3.2) এবং (3.3)-এর পরিপূরকতা ও পরিবর্তনীয়তার সংজ্ঞাকে অঙ্কবাচক সংজ্ঞা বলা যেতে পারে। উপযোগ অপেক্ষক যদি ধনাত্মক ঋজুরৈখিক রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হয় তবেই দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভের চিহ্ন অপরিবর্তিত থাকে। উপযোগ অপেক্ষক শুধুমাত্র একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হ'লে এই চিহ্ন অপরিবর্তিত থাকে না। মনে করা যাক $U=U(x_1, \ \ldots, \ x_n)$ আমাদের আলোচ্য উপযোগ অপেক্ষক এবং $v=F(U)$ U-এর এমন একটি রূপান্তর যে $v=\alpha+\beta U$। সেক্ষেত্রে

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \ \partial x_j} = \beta \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \ \partial x_j} \text{।} \qquad \ldots(3\cdot4)$$

$\beta > 0$ ব'লে $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \ \partial x_j}$ এবং $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \ \partial x_j}$ -এর চিহ্ন একই হবে। কিন্তু $v=$

$F(U)$ যদি শুধুমাত্র একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য হয় তাহলে $F' > 0$। সেক্ষেত্রে

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \ \partial x_j} = F' \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \ \partial x_j} + F'' \frac{\partial U}{\partial x_i} \ \frac{\partial U}{\partial x_j} \text{।} \qquad \ldots(3\cdot5)$$

একমুখী রূপান্তরের বেলায় $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \ \partial x_j}$ -এর চিহ্ন F''-এর উপরেও

নির্ভরশীল। দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভের চিহ্ন ঋজুরৈখিক রূপান্তরের বেলায় (অর্থাৎ অঙ্কবাচক উপযোগের বেলায়) অপরিবর্তিত থাকে ব'লে (3.2) এবং (3.3)-এর সংজ্ঞাকে অঙ্কবাচক সংজ্ঞা বলা যেতে পারে।

চতুর্থ পরিচ্ছেদে স্লুট্স্কী সমীকরণের অন্তর্গত S_{ij}-পদের সাহায্যে আমরা পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার যে-সংজ্ঞা দিয়েছি তাকে বলা যেতে পারে পূরণবাচক সংজ্ঞা। কারণ, সহজেই দেখানো যায় যে উপযোগ অপেক্ষকের একমুখী রূপান্তরের ক্ষেত্রে চাহিদা অপেক্ষক অপরিবর্তিত থাকে; অর্থাৎ, চাহিদা অপেক্ষকের থেকে প্রাপ্য S_{ij}-এর চিহ্নও অপরিবর্তিত।

মনে করা যাক $v=F(U)$, $F'>0$। প্রচলিত বাজেট সমীকরণের শর্তাধীন v-অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের শর্তগুলি হ'লঃ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial x_i}-\mu p_i=0 \qquad (i=1,\ \ldots,\ n) \\ &\sum_{i=1}^{n} p_i x_i=M \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(3\ 6)$$

(3.6) -এর প্রথম n-সংখ্যক সমীকরণকে লেখা যেতে পারে

$$F'\ \frac{\partial U}{\partial x_i}-\mu p_i=0\ \ (i=1,\ \ldots,\ n)$$

অথবা

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}-\frac{\mu}{F'}\ p_i=0(i=1,\ \ldots,\ n) \qquad ..\ (3\cdot7)$$

U-অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের জন্য ব্যবহৃত লাগ্রাঞ্জ গুণক যদি λ হয়

তাহলে $\lambda=\frac{1}{p_i}\ \frac{\partial U}{\partial x_i}$ । (3.6) থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে

$$\mu=\frac{1}{p_i}\ \frac{\partial v}{\partial x_i}=\frac{F'}{p_i}\ \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

$\left(\text{কারণ, } \frac{\partial v}{\partial x_i}=F'\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)$। অতএব $\mu=F'\lambda$। (3.7) -কে তাহলে লেখা যেতে পারে

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}-\lambda p_i=0\ (i=1,\ \ldots,\ n)\text{।} \qquad \ldots(3\cdot8)$$

(3.8) হ'ল U-অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয়ের প্রথম n-সংখ্যক সমীকরণ। অতএব, ভোক্তার উপযোগ অপেক্ষক U কিংবা তার কোনো একমুখী-রূপান্তর v যাই হোক না কেন ভোক্তার সাম্যাবস্থার শর্তাবলি অপরিবর্তিত থাকে।

পূরণবাচক সংজ্ঞার পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতা—অর্থাৎ, S_{ij}-এর সাহায্যে পৃথকীকরণের ধারণাকে চিহ্নিত করতে গিয়ে গোল্ড্‌ম্যান ও উজাওয়া নিচের প্রতিপাদ্য দুটি প্রমাণ করেছেন ঃ

প্রতিপাদ্য 3.1 $\{N_1, \ldots, N_s\}$ এই শ্রেণীবিভাগের জন্য উপযোগ অপেক্ষকের[1] সরল পৃথকীকরণ সম্ভব যদি এবং একমাত্র যদি

$$S_{ij} = \phi^{st}(x) \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial M}, \qquad \ldots (3{\cdot}9)$$

সব $i \varepsilon N_s,\ j \varepsilon N_t\ (s \neq t)$;

এখানে $\phi^{st}(x)$ $(s \neq t)$ হ'ল উপযুক্তভাবে সংজ্ঞায়িত কোনো একটি অপেক্ষক।

প্রতিপাদ্য 3.2 $\{N_1, \ldots, N_s\}$ এই শ্রেণীবিভাগের জন্য উপযোগ অপেক্ষকের[2] স্পষ্ট পৃথকীকরণ সম্ভব যদি এবং একমাত্র যদি

$$S_{ij} = \phi \frac{\partial x_i}{\partial M} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial M}, \qquad \ldots (3{\cdot}10)$$

সব $i \varepsilon N_s,\ j \varepsilon N_t\ (s \neq t)$;

ϕ হ'ল উপযুক্তভাবে সংজ্ঞায়িত কোনো অপেক্ষক।

(3.9) এবং (3.10)-এর শর্ত দুটির প্রসঙ্গে লক্ষণীয় যে সরল পৃথকীকরণের বেলায় সংশ্লিষ্ট অনুপাত $\phi^{st}(x)$ আলোচ্য দ্রব্যগোষ্ঠী s এবং t-এর উপর নির্ভরশীল। অর্থাৎ ভিন্ন ভিন্ন দ্রব্যগোষ্ঠীর জন্য অনুপাতও ভিন্ন হবে। কিন্তু স্পষ্ট পৃথকীকরণের বেলায় অনুপাত ϕ আলোচ্য দ্রব্যগোষ্ঠীর উপর নির্ভরশীল নয়। সব দ্রব্যগোষ্ঠীর জন্যই এক অনুপাত প্রযোজ্য।

আমরা এ পর্যন্ত পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার অঙ্কবাচক ও পূরণবাচক দুটি সংজ্ঞা আলোচনা করেছি। পূরণবাচক সংজ্ঞার সঙ্গে পৃথকী-

1, 2 নিওক্ল্যাসিকাল চাহিদা তত্ত্বের প্রসঙ্গে যে-উপযোগ অপেক্ষকের ব্যবহার করা হয় বর্তমান প্রতিপাদ্য দুটিতেও সেই একই উপযোগ অপেক্ষক ব্যবহার করা হয়েছে। এই ধরনের উপযোগ অপেক্ষককে বলা যেতে পারে অর্ধ-অবতল অপেক্ষক। বর্তমান পরিচ্ছেদের প্রথম এবং দ্বিতীয় উপাংশে ব্যবহৃত উপযোগ অপেক্ষক কিন্তু অর্ধ-অবতল হবার কোনো প্রয়োজন নেই।

করণের ধারণার যোগাযোগও নির্দেশ করা হয়েছে। এই পৃথকীকরণের ধারণাকে ব্যবহার ক'রে পরিবর্তনীয়তা ও পরিপূরকতার তৃতীয় একটি সংজ্ঞাও নির্দেশ করা সম্ভব। মনে করা যাক উপযোগ অপেক্ষকের সরল পৃথকীকরণ সম্ভব। তাহলে

$$U = F[f^1(x^1), \ldots, f^r(f^r), \ldots, f^s(x^s)]।$$

যে কোনো r-তম গোষ্ঠীর জন্য যদি $i \varepsilon r$ হয় তাহলে

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial f^r} \cdot \frac{\partial f^r}{\partial x_i} \qquad \ldots (3 \cdot 11)$$

এখন যদি $i \varepsilon r$, $j \varepsilon q$, $r \neq q$ হয় তাহলে

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial f^r} \cdot \frac{\partial f^r}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial f^r} \cdot \frac{\partial^2 f^r}{\partial x_i \, \partial x_j} + \frac{\partial f^r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial f^r \, \partial f^q} \cdot \frac{\partial f^q}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial f^r \, \partial f^q} \cdot \frac{\partial f^r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f^q}{\partial x_j}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial f^r \, \partial f^q} \Big/ \frac{\partial F}{\partial f^r} \frac{\partial F}{\partial f^q}\right) \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial U}{\partial x_j} \ldots (3.12)$$

সাম্যাবস্থায় $\partial U / \partial x_i = \lambda p_i \quad (i = 1, \ldots, n)$। অতএব,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial x_j} = \gamma_{rq} \, p_i \, p_j \, ; \qquad \ldots (3.13)$$

এখানে

$$\gamma_{rq} = \lambda^2 \frac{\partial^2 F}{\partial f^r \, \partial f^q} \Big/ \frac{\partial F}{\partial f^r} \quad \frac{\partial F}{\partial f^q} \text{।}$$

(3.13) -এর γ_{rq}-কে বলা যেতে পারে r, q দ্রব্যগোষ্ঠীর মধ্যেকার **মিথষ্ক্রিয়া সহগ।**

r এবং q এই দুই দ্রব্যগোষ্ঠী যদি পরস্পর অসম্পর্কিত হয় তাহলে $\partial^2 F / \partial f^r \partial f^q = 0$। অতএব $\gamma_{rq} = 0$ হ'লে বুঝতে হবে যে সংশ্লিষ্ট দ্রব্য-গোষ্ঠী দুটির মধ্যে অনির্ভরতার সম্পর্ক বিদ্যমান। আর যদি $\partial^2 F / \partial f^r \partial f^q > 0$ হয় তাহলে উপযোগ অপেক্ষকের q-শাখার বৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে r-তম শাখার প্রান্তিক উপযোগ বৃদ্ধি পায়। এক্ষেত্রে r এবং q দ্রব্যগোষ্ঠী পরস্পর পরিপূরক। একই যুক্তিতে $\partial^2 F / \partial f^r \partial f^q < 0$ হ'লে দ্রব্যগোষ্ঠী দুটি পরিবর্তনীয়। অতএব γ_{rq}-এর চিহ্ন অনুসারে দ্রব্যগোষ্ঠীর মধ্যেকার অনির্ভরতা, পরিপূরকতা ও পরিবর্তনীয়তার সংজ্ঞা নির্দেশ করা যেতে পারে। কিন্তু সরাসরি মিথষ্ক্রিয়া সহগের সাহায্যে এই ধারণা-গুলিকে চিহ্নিত করার একটা তাত্ত্বিক অসুবিধা আছে। একটু লক্ষ্য করলে দেখা যাবে যে γ_{rq}-এর চিহ্ন একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য নয়। কারণ, γ_{rq}-এর সংজ্ঞার মধ্যে $\partial^2 F / \partial f^r \partial f^q$ এই দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভ্ পদটি রয়েছে। এই ডেরিভেটিভের চিহ্ন কিন্তু উপযোগ অপেক্ষকের একমুখী রূপান্তরের সঙ্গে অপরিবর্তনীয় থাকে না। মনে করা যাক $V = G(U)$, $G' > 0$, হ'ল U-অপেক্ষকের একটি একমুখী রূপান্তর। এ ক্ষেত্রে

$$\frac{\partial^2 V}{\partial f^r \partial f^q} = \frac{\partial}{\partial f^q}\left(G' \frac{\partial F}{\partial f^r}\right)$$

$$= G' \frac{\partial^2 F}{\partial f^r \partial f^q} + G'' \frac{\partial F}{\partial f^r} \frac{\partial F}{\partial f^q}\text{।}$$

G'' অ-শূন্য হ'লে $\dfrac{\partial^2 V}{\partial f^r \partial f^q}$ এবং $\dfrac{\partial^2 U}{\partial f^r \partial f^q}$-এর চিহ্ন আলাদা হতে পারে।

$G'' = 0$ হ'লেই তবে উপযোগ অপেক্ষকের যে-কোনো একমুখী রূপান্তরের জন্য V এবং U-এর দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভের চিহ্ন একই হবে। এই সঙ্গে লক্ষণীয় যে রূপান্তরটি ঋজুরৈখিক হ'লে তবে G'' শূন্য হবে। অর্থাৎ, γ_{rq} পরিমাপটি কেবল ঋজুরৈখিক রূপান্তরের বেলায় ব্যবহার করা যেতে পারে।

একমুখী রূপান্তরের বেলায় মিথষ্ক্রিয়া সহগের সাহায্যে পরিপূরকতা ইত্যাদির সংজ্ঞা নির্দেশ করতে গেলে পরস্পর অ-নির্ভর দ্রব্যগোষ্ঠীর মধ্যে যে-কোনো দুটি গোষ্ঠীকে স্ট্যাণ্ডার্ড হিসেবে ধরতে হবে। আলোচ্য দ্রব্য-গোষ্ঠী দুটির মিথষ্ক্রিয়া সহগ এবং ঐ স্ট্যাণ্ডার্ড সহগের মানের অন্তর বিচার ক'রে তবে পরিপূরকতা বা পরিবর্তনীয়তার সংজ্ঞা নির্দেশ করতে

হবে। লক্ষণীয় যে স্ট্যান্ডার্ড মান শূন্য ব'লে অন্তর বিচার করেও দ্রব্য-গোষ্ঠীর মধ্যে সম্পর্ক নির্দেশ করা যেতে পারে। অর্থাৎ, r এবং q যদি পরস্পর অসম্পর্কিত দ্রব্যগোষ্ঠী হয় তাহলে $\gamma_{rq}=0$। মনে করা যাক এই r, q দ্রব্যগোষ্ঠীই আমাদের নির্বাচিত স্ট্যান্ডার্ড। এক্ষেত্রে অন্য দুটি দ্রব্যগোষ্ঠী s এবং t-এর মধ্যেকার সম্পর্ক বিচারের জন্য আমরা γ_{rq} এবং γ_{st} এই সহগ দুটির অন্তর বিচার করছি। $(\gamma_{st}-\gamma_{rq})$ যদি ধনাত্মক হয় তাহলে s এবং t দ্রব্যগোষ্ঠী দুটি পরস্পর পরিপূরক; এবং ঐ অন্তর ঋণাত্মক হ'লে দ্রব্যগোষ্ঠী দুটি পরিবর্তনীয়।

এখানে লক্ষ্য করা দরকার যে সরাসরি মিথষ্ক্রিয়া সহগ ব্যবহার না ক'রে পরিপূরকতা ও পরিবর্তনীয়তার চরিত্র নির্দেশ করবার জন্য দুটি মিথষ্ক্রিয়া সহগের অন্তরকে ব্যবহার করা হয়েছে। এই পদ্ধতির তাত্ত্বিক যৌক্তিকতা এখানে যে যে-কোনো r এবং q-এর জন্য γ_{rq} উপযোগ অপেক্ষকের একমুখী রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য নয় বটে, তবে দুটি মিথষ্ক্রিয়া সহগের অন্তর কিন্তু ঐ রূপান্তর পর্যন্ত অনন্য।[1]

4. অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক

আমরা এ-পর্যন্ত যে-সব উপযোগ অপেক্ষকের আলোচনা করেছি সেখানে স্বাধীন চল হিসেবে ব্যবহার করা হয়েছে বিভিন্ন দ্রব্যের পরিমাণ। অর্থাৎ, $U=U(x_1, \ldots, x_n)$ এই অপেক্ষকের মান $x_1, \ldots, x_n$ দ্রব্যাদির পরিমাণের উপরেই কেবল নির্ভর করে। আমরা নিওক্ল্যাসিকাল চাহিদা তত্ত্বের বর্ণনায় দেখেছি যে বাজেট সমীকরণের শর্তাধীন এই উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় ক'রে বিভিন্ন দ্রব্যের চাহিদা অপেক্ষক নির্ধারণ করা যেতে পারে। নির্ণীত চাহিদা অপেক্ষকের সাধারণ রূপ হ'ল $x_i=x_i(p_1, \ldots, p_n, M)$। অর্থাৎ, চাহিদা অপেক্ষকের স্বাধীন চল হিসেবে আমরা পাচ্ছি দ্রব্যাদির মূল্য এবং ভোক্তার আর্থিক আয়। $U=U(x_1, \ldots, x_n)$ এই উপযোগ অপেক্ষকের মধ্যে চাহিদা অপেক্ষকের মানগুলি বসালে আমরা পেতে পারি

$$U=U[x_1(p_1, \ldots, p_n, M), \ldots, x_n(p_1, \ldots, p_n, M)]$$
$$=U^*(p_1, \ldots, p_n, M)\text{।} \qquad \ldots(4\cdot1)$$

$U=U(x_1, \ldots, x_n)$ এই অপেক্ষককে যদি **প্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক** বলা হয় তাহলে $U^*(p_1, \ldots, p_n, M)$-কে বলা যেতে পারে **অপ্রত্যক্ষ**

---

1 এই বক্তব্যের প্রমাণের জন্য দ্রঃ L. Phlips—পূর্বোল্লিখিত, পৃঃ 82—83।

উপযোগ অপেক্ষক। U^*-এর তাৎপর্য এই যে ভোক্তার উপযোগ যে পরোক্ষ ভাবে দ্রব্যমূল্যে এবং তার আয়ের উপর নির্ভরশীল তা এখানে স্পষ্ট ক'রে দেখানো হচ্ছে।

লক্ষ্য করা দরকার যে প্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষককে যদি আমরা ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের যথাযথ প্রতিরূপায়ণ হিসেবে কল্পনা করি, তাহলে তার অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকও সেই একই পছন্দ সম্পর্কের প্রতিরূপায়ণ। কারণ, প্রত্যক্ষ থেকে অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকে যাবার সময় কোনো স্তরে ভোক্তার পছন্দ সম্পর্কের পরিবর্তন কল্পনা করা হচ্ছে না।

আমরা আগেই প্রমাণ করেছি যে ভোক্তার চাহিদা অপেক্ষকগুলি সবই আয় এবং মূল্যাবলিতে শূন্য ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক। এই কারণে অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকও আয় এবং মূল্যাবলিতে শূন্য ডিগ্রির সমমাত্রিক অপেক্ষক।

চাহিদা তত্ত্বে প্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের ভূমিকা যে খুবই গুরুত্বপূর্ণ তা আগের আলোচনা থেকে পরিষ্কার দেখতে পাওয়া যায়। অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের ভূমিকাও কিন্তু কোনো কোনো প্রসঙ্গে বেশ গুরুত্বপূর্ণ। অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক আলোচনার সূত্রপাত করতে গিয়ে হাউথেকার[1] উল্লেখ করেছেন যে "অপরিবর্তিত-উপযোগ" সূচক সংখ্যার ভিত্তি হিসেবে অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের ব্যবহার খুব সুবিধাজনক। কোনো ক্ষেত্রে দ্রব্যাদির মূল্যের যদি পরিবর্তন হয়ে থাকে তাহলে আর্থিক আয়ের ঠিক কতোটা ক্ষতিপূরণ যথাযথ হবে এই প্রশ্নের বিচার করতে গিয়ে বস্তুত অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের মান অপরিবর্তিত রাখার প্রয়োজন পড়ে। বর্তমান প্রসঙ্গে অবশ্য অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের প্রয়োগ আমাদের আলোচনার অন্তর্ভুক্ত নয়। অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষকের কিছু তাত্ত্বিক তাৎপর্য বিচার করাই আপাতত আমাদের উদ্দেশ্য।

দ্বৈত সম্পর্ক : চাহিদা তত্ত্বের প্রচলিত উপস্থাপনায় প্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের ভিত্তিতে দ্রব্যাদির চাহিদা অপেক্ষক নির্ধারণ করা হয়। আমরা আগে মন্তব্য করেছি যে প্রত্যক্ষ এবং অপ্রত্যক্ষ দু'রকম উপযোগ অপেক্ষকেরই ভিত্তি হ'ল একই পছন্দ সম্পর্ক। পিছনের পছন্দ সম্পর্ক যদি এক হয় তাহলে দু'রকমের অপেক্ষক থেকে একই চাহিদা অপেক্ষক নির্ধারণ করা সম্ভব। নির্দিষ্ট মূল্যাবলি এবং আর্থিক আয় দেওয়া থাকলে প্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের সর্বোচ্চ মান নির্ণয় ক'রে যে-চাহিদা

অপেক্ষক পাওয়া যায়, নির্দিষ্ট দ্রব্যপরিমাণ দেওয়া থাকলে অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করেও সেই একই চাহিদা অপেক্ষক পাওয়া যাবে। প্রত্যক্ষ এবং অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের মধ্যেকার এই সম্পর্ককে **দ্বৈত সম্পর্ক** বলে।

মনে করা যাক ভোক্তার অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক হ'লঃ

$$U = U^*(p_1, \ldots, p_n, M)$$

এবং তার বাজেট সমীকরণ হ'লঃ

$$x_1p_1 + \ldots + x_np_n = M \text{।}$$

এই বাজেট সমীকরণে $x_i (i=1, \ldots, n)$-এর মান পূর্বনির্দিষ্ট। বাজেট সমীকরণের শর্তাধীন অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের সর্বনিম্ন মান নির্ধারণ করার জন্য লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হবে

$$L = U^*(p_1, \ldots, p_n, M) + \lambda^* [x_1p_1 + \ldots + x_np_n - M] \quad \ldots(4\cdot2)$$

$p_i (i=1, \ldots, n)$, M এবং λ^*-এর পরিবর্তনজনিত L-এর আংশিক ডেরিভেটিভ্ নিলে আমরা পাই

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial U^*}{\partial p_1} + \lambda^* x_1 = 0 \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ &\frac{\partial U^*}{\partial p_n} + \lambda^* x_n = 0 \\ &\frac{\partial U^*}{\partial M} - \lambda^* = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - M = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(4\cdot3)$$

(4.3)-এর প্রথম $(n+1)$ সমীকরণ থেকে পাওয়া যায়

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_i} = -\frac{\partial U^*}{\partial M} x_i$$

অথবা

$$x_i = -\frac{\partial U^*}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial U^*}{\partial M} (i = 1, \ldots, n) \quad \ldots(4\cdot4)$$

ফরাসী অর্থনীতিবিদ রেনে রয়-এর নামানুসারে (4.4) কে বলা হয় **রয়-এর** অভেদ। U^*-অপেক্ষকটি দেওয়া থাকলে রয়-এর অভেদ প্রয়োগ ক'রলে আমরা x_i-এর চাহিদা অপেক্ষক পাই। লক্ষণীয় যে এই চাহিদা অপেক্ষকের স্বাধীন চলগুলি হ'ল দ্রব্যমূল্য p_i এবং আর্থিক আয় M।

একটি উদাহরণ

মনে করা যাক ভোক্তার প্রত্যক্ষ উপযোগ দেওয়া আছে

$$U = x_1 x_2 \text{।} \qquad \ldots(4\cdot5)$$

বাজেট সমীকরণ হবে $p_1x_1+p_2x_2=M$। বাজেট সমীকরণ থেকে x_1-এর উপর নির্ভরশীল x_2-এর মান দাঁড়াবে

$$x_2 = \frac{M - p_1x_1}{p_2} \text{।} \qquad \ldots(4\cdot6)$$

(4.6) -কে (1.5) -এর মধ্যে বসালে আমরা পাই

$$U = \frac{x_1M}{p_2} - \frac{p_1x_1^2}{p_2} \text{।}$$

অতএব U-এর সর্বোচ্চ মানের জন্য

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{M}{p_2} - \frac{2p_1x_1}{p_2} = 0$$

অথবা

$$x_1 = M/2p_1 \text{।} \qquad \ldots(4\cdot7)$$

এখন (4.7) এবং (4.6) থেকে আমরা পাই

$$x_2 = M/2p_2 \text{।} \qquad \ldots(4\cdot8)$$

(4.7) এবং (4.8) হ'ল (4.5) -এর উপযোগ অপেক্ষক থেকে নির্ধারিত চাহিদা অপেক্ষক।

এক্ষেত্রে ভোক্তার অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক হবে

$$U^* = \frac{M^2}{4p_1p_2} \text{।} \qquad \ldots(4\cdot9)$$

রয়-এর অভেদের সাহায্যে এই অপ্রত্যক্ষ উপযোগ **অপেক্ষক থেকে প্রাপ্য** চাহিদা অপেক্ষক হবে

$$x_1 = \frac{M^2}{4p_1^2 p_2} \Big/ \frac{2M}{4p_1 p_2} = M/2p_1 \qquad \ldots(4\cdot7a)$$

$$x_2 = \frac{M^2}{4p_1 p_2^2} \Big/ \frac{2M}{4p_1 p_2} = M/2p_2 \qquad \ldots(4\cdot8a)$$

প্রত্যক্ষ এবং অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক থেকে আমরা একই চাহিদা অপেক্ষক পাচ্ছি।

উপযোগের উপর আয় ও মূল্য প্রভাব

অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের স্বাধীন চলগুলি হ'ল ভোক্তার আর্থিক আয় এবং বিভিন্ন দ্রব্যের মূল্য। নির্দিষ্ট আয় এবং দ্রব্যমূল্যে ভোক্তার সর্বোচ্চ উপযোগ কতো হতে পারে এই অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক থেকে আমরা তা পাই। অতএব আয় এবং দ্রব্যমূল্যের পরিবর্তন হ'লে ভোক্তার প্রাপ্য সর্বোচ্চ উপযোগেরও পরিবর্তন হবে। এই পরিবর্তন নির্ণয় করতে গেলে আমরা অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের আয় এবং মূল্যের পরিবর্তন-জনিত আংশিক ডেরিভেটিভ্ ব্যবহার করতে পারি।

আয়ের পরিবর্তনজনিত (4.1)-এর আংশিক ডেরিভেটিভ্ নিলে আমরা পাই

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \sum_{i=1} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial M} \qquad \ldots(4\cdot10)$$

আমরা জানি যে সাম্যাবস্থায় $\frac{\partial U}{\partial x_i} = \lambda p_i$। অতএব (4.10) থেকে পাওয়া যাচ্ছে

$$\frac{\partial U}{\partial M} = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial M}। \qquad \ldots(4\cdot11)$$

এখন প্রমাণ করা যায় যে $\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial M} = 1$; দ্রব্যমূল্য অপরিবর্তিত অবস্থায় যদি শুধুমাত্র আয়ের পরিবর্তন হয় তাহলে $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial M} dM$।

বাজেট সমীকরণ কিন্তু এই পরিবর্তনের আগে এবং পরে দুই ক্ষেত্রেই সিদ্ধ। অতএব

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = M$$

এবং

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i + dx_i) = M + dM$$

অথবা

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = dM \qquad \ldots(4\cdot12)$$

এখন, যেহেতু $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial M} dM$, তাই

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial M} dM = dM$$

অথবা

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial M} = 1 \qquad \ldots(4\cdot13)$$

(4.11) এবং (4.13) থেকে আমরা পাচ্ছি যে

$$\frac{\partial U}{dM} = \lambda \qquad \ldots(4\cdot14)$$

লাগ্রাঞ্জ গুণক যে ভোক্তার সাম্যাবস্থায় আয়ের প্রান্তিক উপযোগের নির্দেশক তা (4.14) থেকেও স্পষ্ট দেখা যাচ্ছে।

একই রকম ভাবে মূল্যের পরিবর্তনজনিত আংশিক ডেরিভেটিভ্‌গুলিও নির্ণয় করা যেতে পারে। (4.1) থেকে

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i}$$

$$= \lambda \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \qquad \ldots(4\cdot15)$$

p_i-এর পরিবর্তনজনিত বাজেট সমীকরণের ডেরিভেটিভ্‌ নিলে আমরা পাই

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = -x_i \qquad \ldots(4\cdot16)$$

(4.15) এবং (4.16) থেকে পাওয়া যাচ্ছে

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = -\lambda x_i \ (i = 1, \ldots, n) \qquad \ldots(4 \cdot 17)$$

(4.14) এবং (4.17)-এর অর্থনৈতিক তাৎপর্য খুব পরিষ্কার। ভোক্তার আর্থিক আয় বাড়লে, অপরিবর্তিত দ্রব্যমূল্যে, তার সর্বোচ্চ প্রাপ্য উপযোগ বাড়ে এবং অপরিবর্তিত আয়ে দ্রব্যমূল্য বাড়লে তার সর্বোচ্চ প্রাপ্য উপযোগ কমে।

আয় এবং দ্রব্যমূল্যের যদি এক সঙ্গে পরিবর্তন হয় তাহলে উপযোগের উপর প্রভাব কেমন হবে? আমরা এক বিশেষ ধরনের সহপরিবর্তনের কথা এখানে আলোচনা করছি। মনে করা যাক i-তম দ্রব্যমূল্যের পরিবর্তন হ'ল dp_i এবং এই সঙ্গে ভোক্তার আর্থিক আয়ে এমন ক্ষতিপূরণ দেওয়া হ'ল যে সে যেন মূল্য পরিবর্তনের আগেকার দ্রব্যসমষ্টি কিনতে পারে। আয়ের ক্ষতিপূরণ তাহলে হবে $dM = x_i dp_i$। (4.14) এবং (4.17)-এর সাহায্যে এই সহপরিবর্তনের প্রভাব দাঁড়াবে

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial U}{\partial M} dM = -\lambda x_i dp_i + \lambda x_i dp_i = 0 \qquad \ldots(4 \cdot 18)$$

(4.18)-এর তাৎপর্য এই যে আয়ের যে-ক্ষতিপূরণে ভোক্তা তার দ্রব্যসমষ্টির উপর মূল্য পরিবর্তনের প্রভাব এড়াতে পারে সেই ক্ষতিপূরণে তার প্রাপ্ত উপযোগও অপরিবর্তিত থাকবে।

অপ্রত্যক্ষ যোগসম্ভাব্যতা

প্রত্যক্ষ এবং অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের দ্বৈত সম্পর্ক থেকে কিন্তু এমন মনে করার কোনো কারণ নেই যে এর একটি যোগসম্ভব হ'লে অন্যটিও যোগসম্ভব হবে। এই দু'রকম অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতার প্রয়োজনীয় শর্ত স্পষ্টত আলাদা। বর্তমান অংশে আমরা অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকের যোগসম্ভাব্যতার শর্ত নির্ধারণ করব।

এই নির্ধারণের জন্য রয়-এর অভেদ থেকে শুরু করা যাক

$$x_i = -U_i^*/U_M^* \qquad (i = 1, \ldots, n);$$

এখানে $U_i^* = \partial U^*/\partial p_i$ এবং $U_M^* = \partial U^*/\partial M$।

দ্বিতীয় আংশিক ডেরিভেটিভ্গুলির জন্যও অনুরূপ দুটি ক'রে সূচক ব্যবহার ক'রলে এই অভেদ থেকে আমরা পাই

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = -\frac{1}{(U_M^*)^2}[U_M^* U_{ik}^* - U_i^* U_{Mk}^*] \quad (4\cdot19)$$

রয়-এর অভেদ থেকে $U_i^* = -x_i U_M^*$। (4.19) -এর মধ্যে U_i^*-এর এই মান বসালে আমরা পাই

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = \frac{-U_{ik}^* - x_i U_{Mk}^*}{U_M^*}\text{।} \quad \ldots(4\cdot20)$$

বাজেট সমীকরণ থেকে আমরা পাই

$$\frac{\partial M}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_k} + x_k = 0$$

অথবা

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_k} = -x_k \quad \ldots(4\cdot21)$$

(4 20) এবং (4.21) থেকে লেখা যায়

$$-x_k = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{-U^*_{ik} - x_i U^*_{Mk}}{U_M^*} \quad \ldots(4\cdot22)$$

এখন যদি অপ্রত্যক্ষ যোগসম্ভাব্যতা ধ'রে নেওয়া হয় তাহলে $U_{ik}^* = 0$ $(i \neq k)$। এক্ষেত্রে (4.22) -কে লেখা যেতে পারে

$$-x_k = \sum_{i \neq k} p_i \frac{-x_i U^*_{Mk}}{U^*_M} + p_k \frac{-U^*_{kk} - x_k U^*_{Mk}}{U^*_M}$$

$$= -\frac{p_k U^*_{kk}}{U^*_M} - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \frac{U^*_{Mk}}{U^*_M}$$

$$= -\frac{p_k U^*_{kk}}{U^*_M} - M \frac{U^*_{Mk}}{U^*_M}$$

অথবা

$$\frac{U^*_{Mk}}{U^*_M} = \frac{x_k}{M} - \frac{p_k U^*_{kk}}{MU^*_M}\text{।} \quad \ldots(4\cdot23)$$

(4.20) এবং (4.23) থেকে আমরা পাই

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} = x_i \left(\frac{p_k U^*_{kk}}{MU^*_M} - \frac{x_k}{M} \right) \quad \ldots(4\cdot24)$$

এখন (4.24) থেকে আমরা লিখতে পারি

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} \Big/ \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \frac{x_i}{x_j} \; (i \neq k,\ j \neq k) \qquad \ldots (4{\cdot}25)$$

(4.25) হ'ল অপ্রত্যক্ষ যোগসম্ভাব্যতার প্রয়োজনীয় শর্ত। প্রত্যক্ষ যোগসম্ভাব্যতার ক্ষেত্রে প্রয়োজনীয় শর্ত কিন্তু আলাদা। সেখানে আমরা পেয়েছিলাম

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_k} \Big/ \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \frac{\partial x_i}{\partial M} \Big/ \frac{\partial x_j}{\partial M} \; (i \neq k,\ j \neq k)।$$

5. নির্দিষ্ট উপযোগ অপেক্ষক ও চাহিদা ব্যবস্থা

নির্দিষ্ট উপযোগ অপেক্ষক দেওয়া থাকলে চাহিদা তত্ত্বের সূত্র অনুসারে নির্দিষ্ট চাহিদা অপেক্ষক নির্ণয় করা যায়। অর্থাৎ, এক একটি চাহিদা ব্যবস্থার গুণাবলি নির্দিষ্ট উপযোগ অপেক্ষকের গুণাবলির উপর নির্ভরশীল। চাহিদার এম্পিরিকাল বিশ্লেষণে বিভিন্ন নির্দিষ্ট উপযোগ অপেক্ষক ব্যবহার করা হয়। বর্তমান অংশে উপযোগ অপেক্ষকের এই রকম দুটি বিশিষ্ট রূপের আলোচনা করা হবে। এই দুটি বিশিষ্ট রূপের উপযোগ অপেক্ষকের সঙ্গে সংশ্লিষ্ট চাহিদা ব্যবস্থারও বিশ্লেষণ করা হবে।

স্টোন-গিয়ারি[1] উপযোগ অপেক্ষক

আমরা আগে $U = x_1 x_2$ এই উপযোগ অপেক্ষক থেকে চাহিদা অপেক্ষক নির্ধারণ করেছি। এই অপেক্ষকের x_1 এবং x_2-এর বদলে যদি $(x_1 - \gamma_1)$ এবং $(x_2 - \gamma_2)$-কে স্বাধীন চল হিসেবে নেওয়া যায় এবং এদের এক্সপোনেণ্ট হিসেবে যদি যথাক্রমে β_1 এবং β_2 নেওয়া যায় তাহলে লগারিদ্‌ম্‌ রূপান্তরের ফলে আমরা পাই

$$U(x_1, x_2) = \beta_1 \log (x_1 - \gamma_1) + \beta_2 \log (x_2 - \gamma_2) \qquad \ldots. (5{\cdot}1)$$

1 J. R. N. Stone—Linear expenditure systems and demand analysis : an application to the pattern of British demand
[*Economic Journal*, Vol. 64, 1954]

R. C. Geary—A note on 'A constant utility index of the cost of living'
[*Review of Econmic Studies*, Vol. 18, 1950-51]

(5.1) হ'ল দুটি স্বাধীন চলবিশিষ্ট স্টোন-গিয়ারি উপযোগ অপেক্ষক। n-সংখ্যক দ্রব্যের ক্ষেত্রে এই বিশিষ্ট অপেক্ষকের সাধারণ রূপ হ'ল

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log (x_i - \gamma_i); \qquad \ldots(5\cdot2)$$

এখানে β_i এবং γ_i হ'ল উপযোগ অপেক্ষকের প্যারামিটার। (5.2) অপেক্ষকটিকে ক্লাইন্-রুবিন্[2] উপযোগ অপেক্ষকও বলা হয়।

বর্তমান প্রসঙ্গে লাগ্রাঞ্জ অপেক্ষক হবে

$$L = \sum_i \beta_i \log (x_i - \gamma_i) + \lambda \left[\sum_i p_i x_i - M \right]$$

অতএব সাম্যমানের শর্তাবলি হবে

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\beta_i}{x_i - \gamma_i} + \lambda p_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad \ldots(5\cdot3)$$

$$\sum_i p_i x_i - M = 0 \qquad \ldots(5\cdot4)$$

(5.3) থেকে পাওয়া যাচ্ছে যে

$$\beta_i = -\lambda p_i (x_i - \gamma_i) \text{।} \qquad \ldots(5\cdot5)$$

এখন মনে করা যাক $\sum_i \beta_i = 1$; অতএব,

$$-\lambda \sum_i p_i (x_i - \gamma_i) = 1,$$

অথবা

$$\lambda = -\frac{1}{\sum_i p_i (x_i - \gamma_i)}$$

---

2 L. R. Klein & H. Rubin—A constant-utility index of the cost of living [*Review of Economic Studies*, Vol. 15, 1947-48]

$$= -\frac{1}{M-\sum\limits_j p_j\gamma_j} \qquad \ldots(5{\cdot}6)$$

(5.5) এবং (5.6) থেকে

$$\beta_i = \frac{p_i(x_i-\gamma_i)}{M-\sum\limits_j p_j\gamma_j} \qquad \ldots(5{\cdot}7)$$

এখন (5.3) এবং (5.6) থেকে

$$\frac{\beta_i}{x_i-\gamma_i} = \frac{p_i}{M-\sum\limits_j p_j\gamma_j}$$

অথবা

$$x_i = \gamma_i + \frac{\beta_i}{p_i}(M-\sum_j p_j\gamma_j) \qquad \ldots(5{\cdot}8)$$

$$(i=1, \ldots, n)\text{।}$$

(5.8)-এর চাহিদা অপেক্ষকগুলিকে বলা হয় **ঋজুরৈখিক ব্যয় ব্যবস্থা।**

ব্যয় ব্যবস্থা হিসেবে (5.8)-এর একটি সঙ্গত অর্থনৈতিক ব্যাখ্যাও সম্ভব। (5.8)-কে লেখা যেতে পারে

$$p_ix_i = p_i\gamma_i + \beta_i(M-\sum_j p_j\gamma_j); \qquad \ldots(5{\cdot}8a)$$

p_ix_i হ'ল i-তম দ্রব্যের উপর মোট ব্যয়। এই মোট ব্যয়ের দুটি ভাগ। একটি ভাগ হ'ল $p_i\gamma_i$। একে মনে করা যেতে পারে i-তম দ্রব্যের উপর ভোক্তার ন্যূনতম প্রয়োজনীয় ব্যয়। এই প্রয়োজনীয় ব্যয়ের পরিমাণ তার জীবনধারণের প্রয়োজনের উপর নির্ভরশীল হতে পারে। অর্থাৎ, γ_i-এর অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা হ'ল জীবনধারণের প্রয়োজনে ন্যূনতম i-তম দ্রব্যের পরিমাণ। $(M-\Sigma_j p_j\gamma_j)$ তাহলে দাঁড়াল প্রয়োজনের অতিরিক্ত আয়। অর্থাৎ, ভোক্তার জীবনধারণের জন্য প্রয়োজনীয় ব্যয়ের (বা আয়ের) উপর উদ্বৃত্ত। এই উদ্বৃত্ত আয় ভোক্তা তার ইচ্ছামতো যে-কোনো দ্রব্যের উপর ব্যয় করতে পারে। (5.8a) অনুসারে এই আয়ের একটি অংশ মাত্র (β_i) i-তম দ্রব্যের উপর ব্যয় করা হচ্ছে। অর্থাৎ, β_i-এর অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা

দাঁড়াল i-তম দ্রব্যের জন্য ব্যবহার্য উদ্বৃত্ত আয়ের অনুপাত। স্টোন-গিয়ারি উপযোগ অপেক্ষক থেকে প্রাপ্য ঋজুরৈখিক ব্যয় ব্যবস্থায় প্যারামিটার দুটি—β_i এবং γ_i। γ_i হ'ল জীবনধারণের প্রয়োজনে i-তম দ্রব্যের ন্যূনতম পরিমাণ এবং β_i হ'ল ঐ দ্রব্যের উপর ব্যবহার্য উদ্বৃত্ত আয়ের অনুপাত।

উপরের আলোচনায় (5.2) হ'ল স্টোন-গিয়ারি প্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক। ঋজুরৈখিক ব্যয় ব্যবস্থার চাহিদা অপেক্ষকের সাহায্যে স্টোন-গিয়ারি অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক নির্ণয় ক'রলে আমরা পাইঃ

$$U^* = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \left\{ \frac{\beta_i}{p_i} (M - \sum_j p_j \gamma_j) \right\} \quad । \qquad .(5\cdot2a)$$

অ্যাডিলগ্ উপযোগ অপেক্ষক

উপরের আলোচনায় স্টোন-গিয়ারি অপেক্ষক একটি প্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক। এম্পিরিকাল বিশ্লেষণের জন্য হাউথেকার[1] একটি অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষকেরও প্রস্তাব করেছেন। এই অপেক্ষকটিকে বলা হয় অ্যাডিলগ্ অপ্রত্যক্ষ উপযোগ অপেক্ষক। এই অপেক্ষকটির বিশিষ্ট রূপ হ'লঃ

$$U^* = (p_1, \ldots, p_n, M) = -\sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{p_i}{M}\right)^{\alpha_i}; \qquad \ldots(5\cdot9)$$

এখানে A_i এবং α_i দুটি প্যারামিটার। লক্ষণীয় যে এই অপেক্ষকের মধ্যে p_i এবং M-এর অনুপাত একটি স্বাধীন চল; অর্থাৎ, সব দ্রব্যমূল্য এবং আয়ের আনুপাতিক পরিবর্তনের ফলে ভোক্তার প্রাপ্য সর্বোচ্চ উপযোগের কোনো পরিবর্তন হবে না।

এই অপেক্ষকের বেলায় আয় ও মূল্যাবলির পরিবর্তনজনিত আংশিক ডেরিভেটিভ্ সহজেই নির্ণয় করা যায়ঃ

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j \left(\frac{p_j}{M}\right)^{\alpha_j - 1} p_j M^{-2}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A_j \left(\frac{p_j}{M}\right)^{\alpha_j} \qquad \ldots(5\cdot10)$$

H. S. Houthakker–Additive preferences [*Econometrica*, 1960]

এবং

$$\frac{\partial U^*}{\partial p_i} = -\frac{1}{M}\alpha_i A_i \left(\frac{p_i}{M}\right)^{\alpha_i - 1}$$

$$= -\frac{1}{p_i}\alpha_i A_i \left(\frac{p_i}{M}\right)^{\alpha_i} \qquad \ldots(5\cdot11)$$

$(i=1, \ldots, n)$।

এখন (5.10) এবং (5.11) -এর থেকে রয়-এর অভেদের সাহায্যে চাহিদা অপেক্ষক পাওয়া যেতে পারেঃ

$$x_i = -\frac{\partial U*}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial U*}{\partial M}$$

$$= \frac{\frac{1}{p_i}\alpha_i A_i \left(\frac{p_i}{M}\right)^{\alpha_i}}{\frac{1}{M}\sum_j \alpha_j A_j \left(\frac{p_j}{M}\right)^{\alpha_j}}$$

$$= \frac{\alpha_i A_i \left(\frac{p_i}{M}\right)^{\alpha_i - 1}}{\sum_j \alpha_j A_j \left(\frac{p_j}{M}\right)^{\alpha_j}} \text{।} \qquad \ldots(5\cdot12)$$

(5.12) হ'ল অ্যাডিলগ্ অপ্রত্যক্ষ অপেক্ষক থেকে নির্ণীত চাহিদা অপেক্ষক।

$p_i x_i$ হ'ল i-তম দ্রব্যের জন্য ব্যবহৃত মোট খরচ; তাহলে $w_i = p_i x_i / M$-কে বলা যেতে পারে i-তম দ্রব্যের উপর ব্যবহৃত মোট আয়ের অংশ। অ্যাডিলগ্ ব্যবস্থায় এই মোট আয়ের অংশ হবে

$$w_i = \frac{\alpha_i A_i \left(\frac{p_i}{M}\right)^{\alpha_i}}{\sum_j \alpha_j A_j \left(\frac{p_j}{M}\right)^{\alpha_j}} \qquad \ldots(5\cdot13)$$

স্পষ্টত দেখা যাচ্ছে যে $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$; অর্থাৎ প্রত্যেক দ্রব্যের জন্য ব্যবহৃত মোট আয়ের অংশের যোগফল মোট আয়ের সমান।

(5.12) -এর চাহিদা অপেক্ষক থেকে আয়-স্থিতিস্থাপকতা নির্ধারণ করা যায় ঃ

$$\log x_i = \log \alpha_i A_i + (\alpha_i - 1)\log\left(\frac{p_i}{M}\right) - \log [\Sigma\, \alpha_j A_j (p_j/M)^{\alpha_j} \qquad \ldots(5\cdot14)$$

(5.14) থেকে আমরা পাই

$$\frac{\partial(\log x_i)}{\partial(\log M)} = -(\alpha_i - 1) - M\frac{\partial}{\partial M}\{\log [\Sigma\, \alpha_j A_j (p_j/M)^{\alpha_j}]\}$$

$$= 1 - \alpha_i - M\left\{\frac{\Sigma - \alpha_j^2 A_j (p_j/M)^{\alpha_j - 1}\frac{p_j}{M^2}}{\Sigma\, \alpha_j A_j (p_j/M)^{\alpha_j}}\right\}$$

$$= 1 - \alpha_i + \frac{\sum_j \alpha_j^2 A_j (p_j/M)^{\alpha_j}}{\sum_j \alpha_j A_j (p_j/M)^{\alpha_j}}$$

$$= 1 - (\alpha_i - \sum_j \alpha_j W_j)\,। \qquad \ldots(5\cdot15)$$

i-তম দ্রব্যের আয়-স্থিতিস্থাপকতা 1-এর চেয়ে বেশি হবে যদি i-তম দ্রব্যের এক্সপোনেণ্ট α_i সব এক্সপোনেণ্টগুলির ভারযুক্ত গড়ের চেয়ে ছোট হয়।

অর্থাৎ, যে দ্রব্যের বেলায় $\alpha_i < \Sigma_j \alpha_j w_j$ সেই দ্রব্যটিকে **বিলাস দ্রব্য** বলা যেতে পারে। **প্রয়োজনীয় দ্রব্যের** বেলায় $\alpha_i > \Sigma_j \alpha_j w_j$।

একই রকম ভাবে দেখা যায় যে i-তম দ্রব্যের মূল্য-স্থিতিস্থাপকতা হবে

$$\frac{\partial (\log x_i)}{\partial (\log p_i)} = \alpha_i - 1 - \left[\frac{\alpha_i^2 A_i (p_i/M)^{\alpha_i}}{\sum_j \alpha_j A_j (p_j/M)^{\alpha_j}} \right]$$

$$= \alpha_i - 1 - \alpha_i w_i \text{।} \qquad \ldots (5 \cdot 16)$$

অ্যাডিলগ্ অপেক্ষকের ভিত্তিতে স্লুট্স্কী সমীকরণ এবং এম্পিরিকাল বিশ্লেষণের জন্য প্রয়োজনীয় আরো কিছু ফলাফল নির্ণয় করা যেতে পারে।[1]

॥ সমাপ্ত ॥